Magnetohidrodinâmica

Ricardo Luiz Viana
Departamento de Física
Universidade Federal do Paraná
Curitiba - Paraná

13 de janeiro de 2023

Sumário

Capítulo 1

Conceitos básicos

Durante a maior deste trabalho nós iremos nos concentrar em plasmas de alta temperatura, razão pela qual faremos neste Capítulo uma revisão de conceitos básicos sobre plasmas.

Um plasma é um gás ionizado que possui propriedades coletivas devido às interações eletromagnéticas entre suas partículas. Um gás parcialmente ionizado é formado por elétrons livres (de carga $q = -e$, onde $e = 1,6022 \times 10^{-19} C$ [1] [1]), íons positivos (de carga $q = +Ze$, onde Z é o número atômico) e átomos neutros (de carga nula). Nós limitaremos nosso estudo a plasmas totalmente ionizados, onde não há atomos neutros.

Num gás de átomos neutros as colisões são de curto alcance, resultando em uma interação essencialmente local. Já num gás ionizado as forças eletromagnéticas entre as partículas carregadas são de longo alcance, o que ocasiona o aparecimento de comportamentos coletivos, como a blindagem eletrostática e a existência de oscilações de alta frequência [2]. Devido ao longo alcance das interações entre partículas carregadas, num plasma a energia potencial de uma partícula é tipicamente muito menor do que sua energia cinética [3].

1.1 Descrição cinética de um plasma

Num plasma totalmente ionizado há duas espécies de partículas, designadas pelo sufixo s: elétrons ($s = e$) e íons positivos ($s = i$). As duas quantidades macroscópicas básicas que caracterizam cada espécie são sua densidade e temperatura. A densidade de partículas pertencentes à espécie s é o número delas por unidade de volume: $n_s = N_s/V$, medida em m^{-3}. Nas condições normais de pressão e temperatura a densidade de partículas num gás ideal é $n_0 = 2,6868 \times 10^{25} m^{-3}$, chamado número de Loschmidt [1].

Tanto a densidade como a temperatura de um gás em equilíbrio térmico podem ser encaradas sob o ponto de vista microscópico, definindo a distribuição de velocidades $\mathbf{c}$ das partículas da espécie s, ou $f_s(\mathbf{c})$. A quantidade $f_s(\mathbf{c}) d^3c$ é a probabilidade de encontrar uma partícula da espécie s com valores das componentes da velocidade entre c_x and $c_x + dc_x$, c_y e $c_y + dc_y$, c_z e $c_z + dc_z$. O elemento de volume no espaço das velocidades é $d^3c = dc_x dc_y dc_z$.

Para um gás de partículas clássicas (não-quânticas e não-relativísticas) da espécie s com densidade de partículas n_s e em equilíbrio térmico à temperatura T_s, a distribuição

[1] Adotaremos unidades do sistema internacional (MKSA).

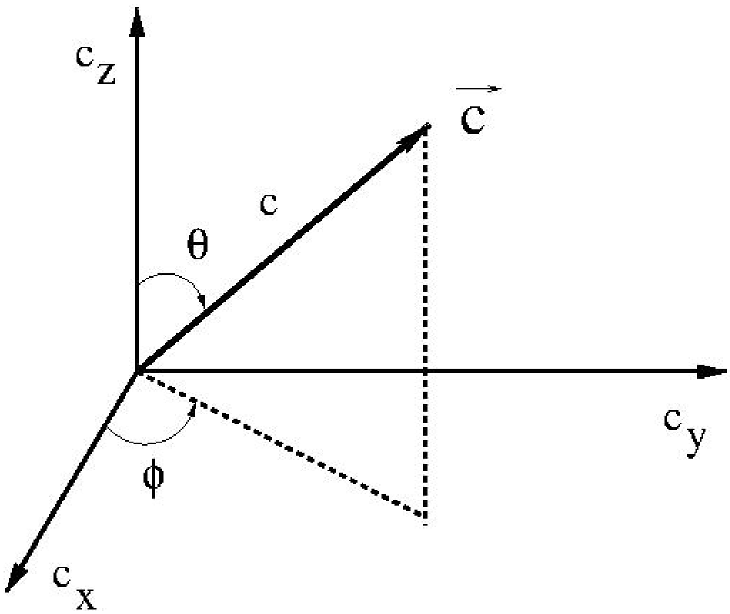

Figura 1.1: Coordenadas esféricas no espaço das velocidades das partículas.

de velocidades é dada pela Maxwelliana [2]

$$f_s(\mathbf{c}) = A \exp\left(-\frac{m_s c^2}{2k_B T_s}\right), \tag{1.1}$$

onde m_s é a massa da partícula, $c^2 = c_x^2 + c_y^2 + c_z^2$, e $k_B = 1,3807 \times 10^{-23} J/K$ é a constante de Boltzmann. O número de partículas por unidade de volume (densidade de número de partículas) é obtida integrando-se esta distribuição em todas as velocidades

$$n_s = \int d^3c\, f_s(\mathbf{c}), \tag{1.2}$$

o que fornece a constante de normalização A em (1.1).

Ao integrar (1.1) é conveniente usarmos coordenadas esféricas no espaço das velocidades: $d^3c = d\phi\, \sin\theta d\theta\, c^2 dc$, onde $0 \leq \phi < 2\pi$ e $0 \leq \theta \leq \pi$ [Fig. 1.1]. Neste caso, usando a integral gaussiana

$$\int_0^\infty dx x^n e^{-ax^2} = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{2a^{\frac{n+1}{2}}}, \tag{1.3}$$

obtemos, para a constante em (1.1)

$$A = n_s \left(\frac{m_s}{2\pi k_B T_s}\right)^{3/2}, \tag{1.4}$$

de modo que

$$f_s(\mathbf{c}) = n_s \left(\frac{m_s}{2\pi k_B T_s}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{m_s c^2}{2k_B T_s}\right). \tag{1.5}$$

Sendo f_s uma distribuição contínua de probabilidades no espaço das velocidades das partículas, podemos calcular o valor médio de uma quantidade genérica $\xi(\mathbf{c})$ como

$$\langle \xi(\mathbf{c}) \rangle = \frac{\int d^3c\, f_s(\mathbf{c}) \xi(\mathbf{c})}{\int d^3c\, f_s(\mathbf{c})} = \frac{1}{n_s} \int d^3c\, f_s(\mathbf{c}) \xi(\mathbf{c}). \tag{1.6}$$

Usando essa definição segue que a velocidade média das partículas num gás em equilíbrio térmico é nula, pois

$$\langle \mathbf{c} \rangle = \frac{1}{n_s} \int d^3c\, \mathbf{c} f_s(\mathbf{c}) = 0, \tag{1.7}$$

já que $f_s(\mathbf{c})$, dada por (1.5), é uma função par das velocidades. Usando (1.3), por sua vez, obtemos

$$\langle c^2 \rangle = 3\,\frac{k_B T_s}{m_s} = 3\,c_{Ts}^2, \tag{1.8}$$

onde definimos a velocidade térmica para a espécie s como

$$c_{Ts} = \sqrt{\frac{k_B T_s}{m_s}}. \tag{1.9}$$

A velocidade térmica é uma velocidade característica das partículas em uma distribuição Maxwelliana, a qual pode ser reescrita como:

$$f_s(\mathbf{c}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \frac{n_s}{c_{Ts}^3} \exp\left(-\frac{c^2}{2c_{Ts}^2} \right). \tag{1.10}$$

Usando (1.8) a energia cinética média das partículas da espécie s é

$$\langle K_s(\mathbf{c}) \rangle = \frac{1}{2} m_s \langle c^2 \rangle = \frac{3}{2} k_B T_s = \frac{3}{2} m_s c_{Ts}^2, \tag{1.11}$$

e que é diretamente proporcional à temperatura da espécie s, de sorte que a energia cinética média por grau de liberdade é $k_B T_s/2$, de acordo com o princípio da equipartição de energia.

A proporcionalidade entre energia cinética e temperatura faz com que a temperatura de um plasma possa ser expressa em unidades de energia, como o elétron volt ($1\,eV = 1,6022 \times 10^{-19}\,J$). A temperatura correspondente à energia de $1\,eV$ será

$$\frac{1\,eV}{k_B} = \frac{1,6022 \times 10^{-19}\,J}{1,3807 \times 10^{-23}\,J/K} = 11604K. \tag{1.12}$$

Na física de plasma é costume indicar, nas fórmulas práticas, a temperatura (na verdade $k_B T_s$) diretamente em eV. Por exemplo, para elétrons ($m_e = 9,1094 \times 10^{-31} kg$) a velocidade térmica (1.9), em m/s, é

$$c_{Te} = 4,19 \times 10^5\,(k_B T_e)^{1/2}, \qquad (k_B T_e \text{ em eV}), \tag{1.13}$$

e para íons de Hidrogênio (prótons) de massa $m_p = 1,6726 \times 10^{-27} kg$

$$c_{Ti} = 9,79 \times 10^3\,(k_B T_i)^{1/2}, \qquad (k_B T_i \text{ em eV}). \tag{1.14}$$

1.2 Quase-neutralidade

Uma das propriedades que distinguem os plasmas de gases ordinários é a chamada blindagem de Debye, através da qual as partículas do plasma tendem a neutralizar qualquer carga elétrica que seja nele inserida. A distância característica dessa blindagem, chamada comprimento de Debye, pode ser determinada usando argumentos do eletromagnetismo e da mecânica estatística de equilíbrio.

Partimos da lei de Gauss para o campo elétrico $\mathbf{E}$,

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{\varepsilon_0} \rho_c(\mathbf{r}), \tag{1.15}$$

onde $\varepsilon_0 = 8,854 \times 10^{-12} F/m$ é a permissividade do vácuo, e ρ_c é a densidade volumétrica de carga elétrica.

Podemos expressar o campo elétrico estático em termos de um potencial escalar $\Phi_E(\mathbf{r})$:

$$\mathbf{E} = -\nabla \Phi_E, \tag{1.16}$$

de modo que a lei de Gauss (1.15) conduz à equação de Poisson

$$\nabla^2 \Phi_E = -\frac{\rho_c}{\varepsilon_0}. \tag{1.17}$$

Num plasma formado por elétrons e íons positivos a densidade líquida de carga é

$$\rho_c = e(n_i - n_e), \tag{1.18}$$

que, substituída na equação de Poisson, resulta em

$$\nabla^2 \Phi_E = \frac{e}{\varepsilon_0}(n_e - n_i). \tag{1.19}$$

A distribuição de Maxwell-Boltzmann para partículas da espécie s com energia total $\mathcal{E}_s$ é

$$f_s(\mathbf{c}) = A \exp\left(-\frac{\mathcal{E}_s}{k_B T_s}\right), \tag{1.20}$$

onde A é uma constante de normalização e a energia total é a soma das energias cinética e potencial:

$$\mathcal{E}_s = K_s + U_s = \frac{1}{2} m_s c^2 + q_s \Phi_E. \tag{1.21}$$

A distribuição Maxwelliana de velocidades (1.5) é um caso particular de (1.20) na ausência do campo elétrico.

Podemos fatorar a parte da energia total que não depende da carga, definindo

$$f_0(\mathbf{c}) = A \exp\left(-\frac{m_s c_s^2}{2 k_B T_s}\right), \tag{1.22}$$

de maneira que as funções de distribuição para íons e elétrons podem ser escritas, respectivamente, como

$$f_i(\mathbf{c}) = f_0(\mathbf{c}) \exp\left(-\frac{e\Phi_E}{k_B T_i}\right), \tag{1.23}$$

$$f_e(\mathbf{c}) = f_0(\mathbf{c}) \exp\left(-\frac{e\Phi_E}{k_B T_e}\right). \tag{1.24}$$

As densidades de íons e elétrons serão dadas por (1.2) como

$$n_i = n_0 \exp\left(-\frac{e\Phi_E}{k_B T_i}\right), \tag{1.25}$$

$$n_e = n_0 \exp\left(\frac{e\Phi_E}{k_B T_e}\right), \tag{1.26}$$

onde supomos que, na ausência de campo elétrico, a densidade de íons seja igual a de elétrons, ambas dadas por

$$n_0 = \int d^3c\, f_0(\mathbf{c}). \tag{1.27}$$

Num plasma a energia potencial deve ser muito menor que a energia cinética, que por sua vez é da ordem da energia térmica. Logo $|e\Phi_E| \ll k_B T_s$ e podemos expandir as exponenciais acima em série de potências, retendo apenas os termos de ordem mais baixa. Fazendo isto a Eq. (1.19) será expressa como

$$\nabla^2\Phi_E = \frac{e^2 n_0}{\varepsilon_0}\left(\frac{1}{k_B T_e} + \frac{1}{k_B T_i}\right)\Phi_E. \tag{1.28}$$

Definimos o comprimento de Debye para a espécie s como

$$\lambda_{Ds} = \sqrt{\frac{k_B T_s \varepsilon_0}{n_0 e^2}}, \tag{1.29}$$

e um comprimento análogo para a mistura das espécies:

$$\frac{1}{\lambda_D^2} = \frac{1}{\lambda_{Di}^2} + \frac{1}{\lambda_{De}^2}, \tag{1.30}$$

tal que (1.28) fica

$$\nabla^2\Phi_E = \frac{1}{\lambda_D^2}\Phi_E. \tag{1.31}$$

Como um exemplo de solução de (2.87) vamos considerar um plano condutor infinito mantido a um potencial constante φ_0 e colocado num plasma em $x = 0$, de modo que o sistema seja efetivamente unidimensional

$$\frac{d^2\Phi_E}{dx^2} - \frac{\Phi_E}{\lambda_D^2} = 0, \tag{1.32}$$

com as seguintes condições de contorno:

$$\Phi_E(x=0) = \Phi_0, \qquad \Phi_E(|x| \to \infty) = 0. \tag{1.33}$$

A solução de (1.32), compatível com (1.33), é

$$\Phi_E(x) = \Phi_0 e^{-|x|/\lambda_D}, \tag{1.34}$$

com um campo elétrico correspondente dado por (1.16):

$$\mathbf{E}(x) = \frac{\Phi_0}{\lambda_D} e^{-|x|/\lambda_D}\hat{\mathbf{e}}_x, \tag{1.35}$$

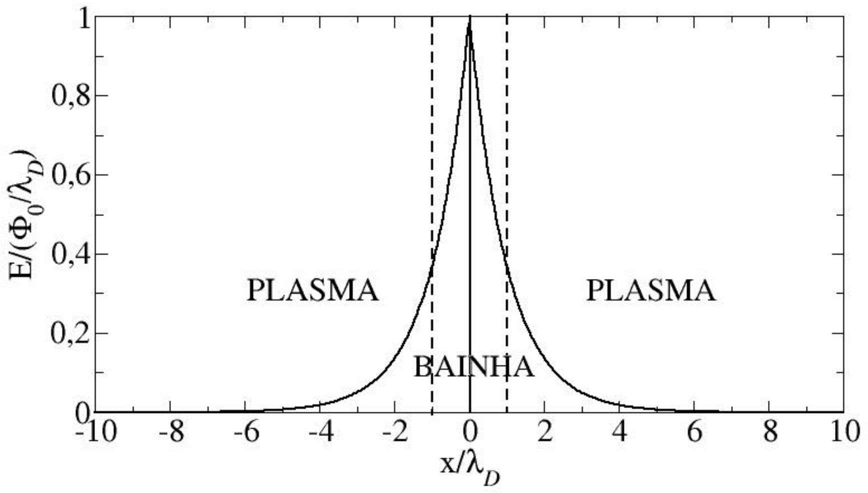

Figura 1.2: Decaimento do campo elétrico num plasma devido a um plano infinito carregado na origem.

cujo módulo cai rapidamente a zero se penetramos no interior do plasma [Fig. 1.2]. De fato, após alguns comprimentos de Debye o campo elétrico é praticamente nulo, o que significa que no interior do plasma temos quase-neutralidade. Já na região intermediária, chamada de "bainha", o gás não mais exibe a quase-neutralidade. Um plasma é, de fato, um gás ionizado para o qual o comprimento de Debye é muito menor do que seu comprimento característico L:

$$\lambda_D \ll L. \tag{1.36}$$

Para elétrons e íons positivos (de hidrogênio) o comprimento de Debye é dado pela fórmula prática

$$\lambda_{Ds} = 7430 n_s^{-1/2} (k_B T_s)^{1/2}, \qquad (k_B T_s \text{ em eV}). \tag{1.37}$$

1.3 Parâmetro de plasma

Se, ao invés de um eletrodo plano, inserirmos uma carga de prova q_T num plasma, também haverá a formação de uma bainha circundando a carga de prova, cuja dimensão característica é o comprimento de Debye λ_{Ds}. Devido à simetria esférica da situação, podemos imaginar uma esfera de raio λ_{Ds} centrada na carga de prova (esfera de Debye). O número de partículas da espécie s dentro dessa esfera é

$$\Lambda_s = n_s V = \frac{4\pi}{3} n_s \lambda_{Ds}^3, \tag{1.38}$$

chamado parâmetro de plasma.

A energia potencial eletrostática de uma partícula da espécie s devido ao seu vizinho mais próximo é

$$U_s = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{e^2}{d}, \tag{1.39}$$

onde d é a distância entre as partículas, e que pode ser encarada também como o raio de uma esfera com apenas uma partícula em seu interior:

$$n_s = \frac{3}{4\pi d^3}. \tag{1.40}$$

Substituindo (1.40) em (1.39) obtemos assim

$$U_s = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{4\pi n_s}{3}\right)^{1/3}. \tag{1.41}$$

A energia cinética média, de acordo com (1.11) é

$$\langle K_s \rangle = \frac{3}{2}k_B T_s, \tag{1.42}$$

e que, num plasma, deve ser muito maior do que a energia potencial, ou seja

$$e^2 n_s^{1/3} \ll k_B T_s. \tag{1.43}$$

Usando (1.29) obtemos, em termos do comprimento de Debye, que

$$n_s\left(\frac{k_B T_s}{n_s e^2}\right)^{3/2} = n_s (4\pi)^{3/2}\lambda_s^3 \gg 1, \tag{1.44}$$

o que leva à seguinte condição para que um gás ionizado seja um plasma:

$$\Lambda_s \gg 1. \tag{1.45}$$

Em outras palavras, num plasma temos tipicamente um grande número de partículas dentro da esfera de Debye.

Uma fórmula prática para o parâmetro de plasma é

$$\Lambda_s = 1,72 \times 10^9\, n_s^{-1/2}\,(k_B T_s)^{3/2} \qquad (k_B T_s \text{ em eV}). \tag{1.46}$$

1.4 Frequência de plasma

Um plasma é um gás quase-neutro formado por íons positivos e elétrons. Se tentamos, por algum meio, separar as duas espécies, aparecem forças restauradoras intensas de natureza eletrostática. Tais forças produzem oscilações no plasma com uma frequência bem definida. Como os íons têm uma massa da ordem da massa do próton, a razão entre as massas é

$$\frac{m_p}{m_e} = \frac{1,673 \times 10^{-27}\,kg}{9,109 \times 10^{-31}\,kg} \approx 1840. \tag{1.47}$$

Sendo $m_p \gg m_e$ podemos, numa primeira aproximação, negligenciar o movimento dos íons frente aos elétrons. Um modelo bastante simples para descrever as oscilações de carga consiste num plasma com íons praticamente imóveis de densidade n_0, através dos quais os elétrons podem mover-se livremente. Supomos, ainda, que o plasma é quase-neutro, de modo que $n_e \approx n_0$, e que os elétrons movem-se coletivamente, de

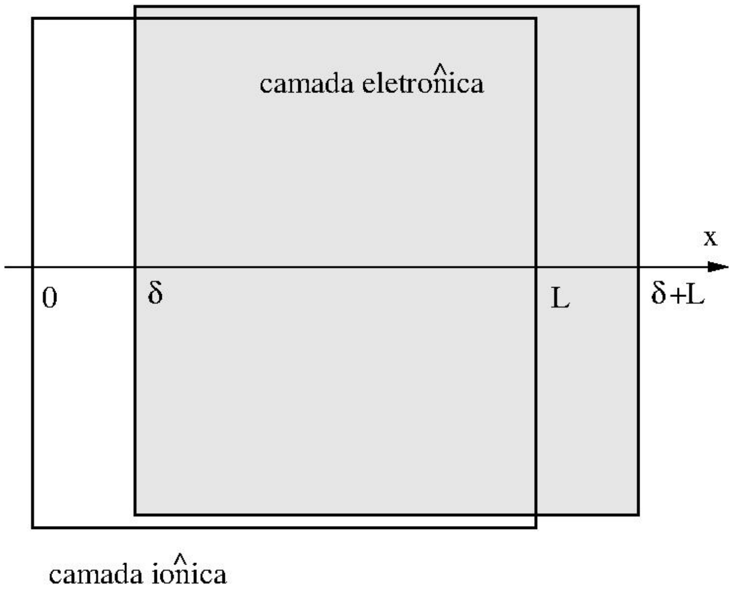

Figura 1.3: Deslocamento de uma camada eletrônica em relação a uma camada iônica no interior de um plasma.

modo que consideramos duas lâminas interpenetrantes de elétrons e íons de comprimento L, e que podem estar mutuamente deslocadas por uma distância $\delta \ll L$ [3] [Fig. 1.3].

Sendo as lâminas infinitamente extensas, podemos considerar o movimento das mesmas como essencialmente unidimensional, ao longo da direção x. Usando a lei de Gauss elétrica o deslocamento da lâmina eletrônica satisfaz a equação

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{dE}{dx} = \frac{\rho_c}{\varepsilon_0} = -\frac{n_e e}{\varepsilon_0}. \tag{1.48}$$

Usando a condição de contorno $E(x=0)=0$ temos que o deslocamento na posição $x=\delta$ é

$$E(x=\delta) = -\frac{n_e e \delta}{\varepsilon_0}. \tag{1.49}$$

Sendo a força elétrica por unidade de área da lâmina eletrônica dada por

$$F_E = -\frac{n_e^2 e^2 \delta L}{\varepsilon_0}, \tag{1.50}$$

a segunda lei de Newton fornece a equação de movimento que governa a evolução temporal do deslocamento δ entre as lâminas eletrônica e iônica [3]

$$\frac{d^2\delta}{dt^2} + \frac{n_e e^2}{m_e \varepsilon_0}\delta = 0, \tag{1.51}$$

cuja solução representa oscilações harmônicas com frequência

$$\omega_{pe} = \sqrt{\frac{n_e e^2}{m_e \varepsilon_0}}. \tag{1.52}$$

chamada frequência de plasma eletrônica.

De forma análoga podemos definir também uma frequência de plasma iônica:

$$\omega_{pi} = \sqrt{\frac{n_i e^2}{m_i \varepsilon_0}}, \tag{1.53}$$

assim como uma frequência de plasma total:

$$\omega_p^2 = \omega_{pe}^2 + \omega_{pi}^2. \tag{1.54}$$

Usando (1.13) e (1.29) obtemos a seguinte relação entre a velocidade térmica, a frequência de plasma e o comprimento de Debye para a espécie s:

$$v_{Ts} = \omega_{ps} \lambda_{Ds}. \tag{1.55}$$

Algumas fórmulas práticas para as frequências de plasma são:

$$\omega_{pe} = 56,4 n_e^{1/2}, \qquad (s^{-1}) \tag{1.56}$$

$$\nu_{pe} = \frac{\omega_{pe}}{2\pi} = 9 n_e^{1/2}, \qquad (Hz)$$

$$\omega_{pi} = 1,32 n_i^{1/2}, \qquad (s^{-1}) \tag{1.57}$$

$$\nu_{pi} = \frac{\omega_{pi}}{2\pi} = 0,2 n_i^{1/2}, \qquad (Hz)$$

Para plasmas de fusão e da corona solar, as frequências de plasma eletrônicas são da ordem de $2 \times 10^{10}\, s^{-1}$ e $2 \times 10^{9}\, s^{-1}$, respectivamente, ambas correspondendo no espectro eletromagnético à região de micro-ondas.

1.5 Partículas carregadas num campo magnético

1.5.1 Giração num campo magnético uniforme

Plasmas astrofísicos e de fusão estão quase sempre sujeitos a campos magnéticos externos. O movimento de uma partícula carregada de massa m_s e carga q_s, movendo-se com velocidade $\mathbf{c}$ num campo magnético $\mathbf{B}$ é governado pela força de Lorentz e a segunda lei de Newton:

$$m_s \frac{d\mathbf{c}}{dt} = q_s \mathbf{c} \times \mathbf{B}, \tag{1.58}$$

Supondo um campo magnético uniforme $\mathbf{B} = B_0 \hat{\mathbf{e}}_z$ a equação acima tem as seguintes em componentes cartesianas

$$\frac{dc_x}{dt} = \omega_{cs} c_y, \tag{1.59}$$

$$\frac{dc_y}{dt} = -\omega_{cs} c_x, \tag{1.60}$$

$$\frac{dc_z}{dt} = 0, \tag{1.61}$$

onde definimos a chamada girofrequência (ou frequência de cíclotron) para a espécie s:

$$\omega_{cs} = \frac{|q_s| B_0}{m_s}. \tag{1.62}$$

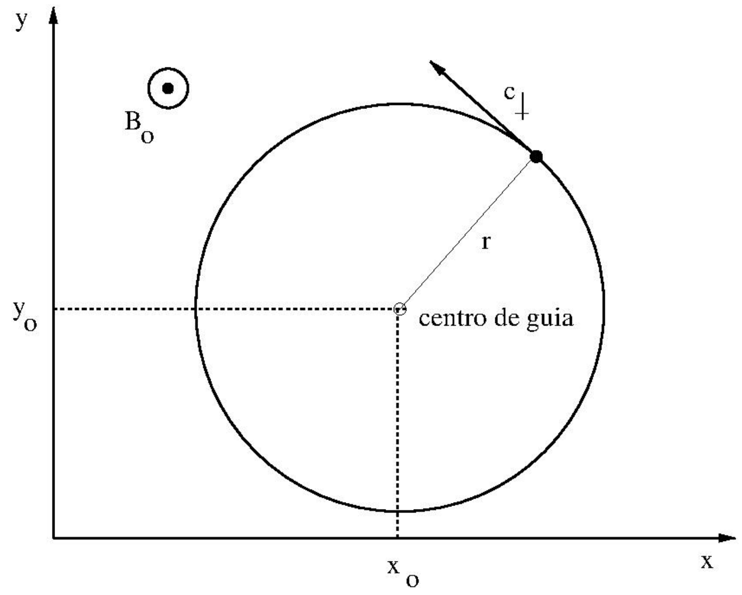

Figura 1.4: Movimento de giração de uma partícula carregada num campo elétrico uniforme.

A equação (1.61) é resolvida imediatamente fornecendo $c_z = c_{\|} = const.$. Já as soluções de (1.59) e (1.60) podem ser escritas como

$$c_x = c_{\perp} \cos(\omega_{cs} t + \delta_x), \tag{1.63}$$
$$c_y = c_{\perp} \cos(\omega_{cs} t + \delta_y), \tag{1.64}$$

onde $c_{\perp}$ e $\delta_{x,y}$ são constantes de integração, cujos valores são determinados pelas condições iniciais do movimento. Escolhendo valores apropriados para elas, e integrando novamente no tempo obtemos

$$x - x_0 = r_{cs} \sin(\omega_{cs} t), \tag{1.65}$$
$$y - y_0 = r_{cs} \sin(\omega_{cs} t), \tag{1.66}$$

onde (x_0, y_0) são novas constantes de integração, e também definimos o giro-raio (ou raio de cíclotron) para a espécie s como

$$r_{cs} = \frac{c_{\perp}}{\omega_{cs}}. \tag{1.67}$$

Se nós substituirmos $c_{\perp}$ pela velocidade térmica das partículas, (1.9), obtemos o chamado raio de Larmor:

$$r_s = \frac{c_{Ts}}{\omega_{cs}}. \tag{1.68}$$

A equação da trajetória da partícula, no plano $z = const.$, é obtida eliminando-se o tempo de (1.65)-(1.66):

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r_{cs}^2, \tag{1.69}$$

que é um círculo de raio r_{cs} e com centro no ponto (x_0, y_0), denominado "centro de guia" do movimento. Combinando-se este movimento circular uniforme no plano perpendicular ao campo com o movimento uniforme na direção do mesmo, resulta que a trajetória da partícula (também chamada "giração") é helicoidal, cujo ângulo de passo é dado por

$$\tan\theta = \frac{c_\parallel}{c_\perp}, \tag{1.70}$$

assim como o passo linear (a distância ao longo de z após um círculo completo no plano perpendicular) é

$$L = \frac{2\pi c_\parallel}{\omega_{cs}} = \frac{2\pi c_\perp \tan\theta}{\omega_{cs}}. \tag{1.71}$$

Algumas fórmulas práticas para a girofrequência e o raio de Larmor são

$$\begin{aligned}
\omega_{ce} &= 1{,}76 \times 10^{11} B_0, \qquad B_0\,(\text{em T}) && (1.72)\\
r_e &= 2{,}38 \times 10^{-6} (k_B T_e)^{1/2} B_0^{-1}, \qquad k_B T_e\,\text{em eV} &&\\
\omega_{ci} &= 9{,}58 \times 10^{7} B_0, \qquad B_0\,\text{em T} && (1.73)\\
r_i &= 1{,}02 \times 10^{-4} (k_B T_i)^{1/2} B_0^{-1}, \qquad k_B T_i\,\text{em eV} &&
\end{aligned}$$

1.5.2 Deriva $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$

Quando existe, além do campo magnético, também um campo elétrico constante no tempo e uniforme no espaço, o movimento das partículas do plasma será mais complicado: além do movimento básico de giração, teremos um deslocamento como um todo da trajetória helicoidal numa certa direção espacial, ao qual denominamos deriva. Há várias derivas importantes na Física de Plasmas, mas no âmbito deste livro nós estaremos interessados apenas na chamada deriva $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$, que ocorre justamente quando há campos elétrico e magnético cruzados. O estudo mais aprofundado de outras derivas pode ser encontrado nas referências [2, 3, 13, 14], dentre outras.

A equação geral de movimento, neste caso, será

$$m_s \frac{d\mathbf{c}}{dt} = q_s(\mathbf{E} + \mathbf{c} \times \mathbf{B}). \tag{1.74}$$

Supondo campos elétrico e magnético uniformes nas seguintes direções

$$\mathbf{E} = E_x \hat{\mathbf{e}}_x + E_z \hat{\mathbf{e}}_z, \qquad \mathbf{B} = B\hat{\mathbf{e}}_z, \tag{1.75}$$

as componentes cartesianas de (1.74) serão

$$\frac{dc_x}{dt} = \frac{q_s}{m_s} E_x + \omega_{cs} c_y, \tag{1.76}$$

$$\frac{dc_y}{dt} = -\omega_{cs} c_x, \tag{1.77}$$

$$\frac{dc_z}{dt} = \frac{q_s}{m_s} E_z. \tag{1.78}$$

Novamente, a solução de (1.78) é elementar,

$$v_z = v_{z0} + \frac{q_s E_z t}{m_s}, \tag{1.79}$$

indicando um movimento uniformemente acelerado do centro de guia na direção paralela ao campo magnético. Derivando em relação ao tempo as equações (1.76)-(1.77) obtemos

$$\frac{d^2c_x}{dt^2} = -\omega_{cs}^2 c_x, \tag{1.80}$$

$$\frac{d^2}{dt^2}\left(c_y + \frac{E_x}{B}\right) = -\omega_{cs}^2\left(c_y + \frac{E_x}{B}\right), \tag{1.81}$$

de forma que recaímos no mesmo conjunto de equações da giração simples (1.59)-(1.60), onde o termo c_y é substituído por $c_y + (E_x/B)$. Dessa forma, a giração continua existindo mas o centro de guia sofre uma deriva ao longo da direção y com velocidade E_x/B. Vetorialmente, a velocidade da deriva é escrita de forma geral [2]

$$\mathbf{v}_D = \frac{\mathbf{E}\times\mathbf{B}}{B^2}. \tag{1.82}$$

Observe que a velocidade desta deriva é independente tanto da carga, como da massa e até mesmo da velocidade das partículas, de modo que o sentido da deriva $\mathbf{E}\times\mathbf{B}$ é o mesmo para elétrons e íons.

1.6 Colisões em plasmas

Num plasma composto de elétrons e íons positivos, há diversos tipos de colisão: entre elétrons e íons positivos, entre íons e elétrons, entre íons e íons, e entre elétrons e elétrons. Como os íons positivos são bem mais massivos que os elétrons, as colisões mais importantes num plasma ocorrem entre elétrons incidentes e íons positivos praticamente em repouso, numa primeira aproximação. Por este motivo é neste tipo de colisão que no qual iremos focalizar nossa atenção.

1.6.1 Colisões elétron-íon

A geometria de uma colisão elétron-íon está representada esquematicamente na Figura 1.5: um elétron com velocidade c_0 tem uma trajetória que, assintoticamente, é uma reta horizontal que dista b da reta que passa pelo íon positivo, supostamente em repouso. A distância b é o parâmetro de impacto. Existe uma força Coulombiana de atração entre o elétron e o íon positivo, ambos de carga e, cujo módulo é

$$F(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{r}, \tag{1.83}$$

onde r é a distância entre ambos.

Caso o parâmetro de impacto fosse nulo, teríamos uma colisão frontal entre o elétron, que vem do infinito com energia cinética $K = m_e c_0^2/2$ e o íon em repouso, que pára o elétron a uma distância

$$r_0 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{K}. \tag{1.84}$$

Usando r_0 em (1.83) escrevemos simplesmente

$$F(r) = K\frac{r_0}{r^2}. \tag{1.85}$$

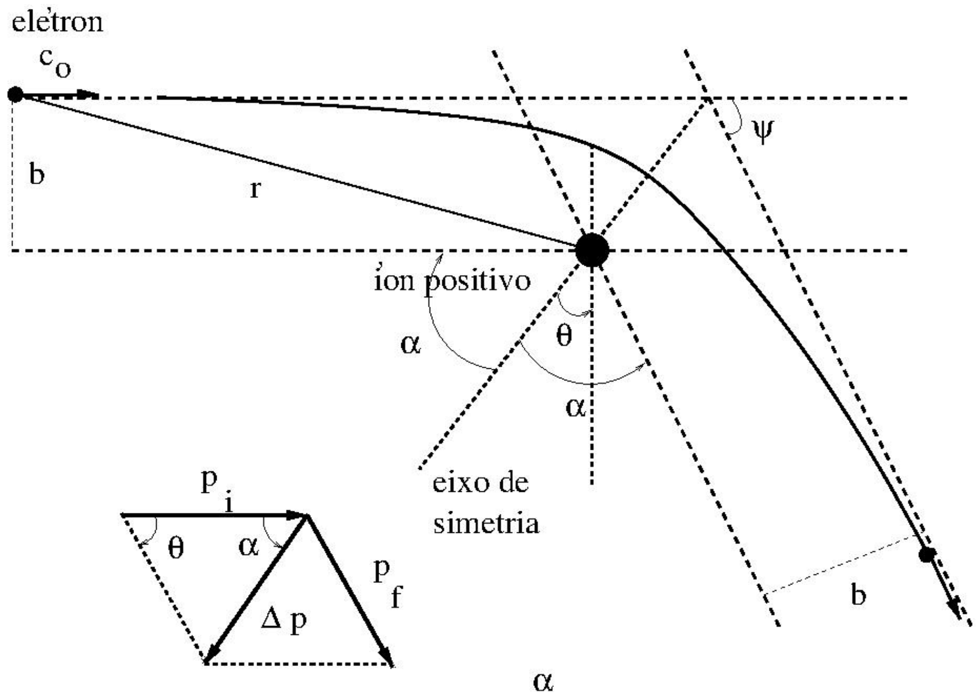

Figura 1.5: Geometria de uma colisão entre duas partículas carregadas.

Após a colisão o elétron adquire assintoticamente uma trajetória retilínea que faz um ângulo ψ com a direção inicial do movimento. Denominamos ψ o ângulo de espalhamento do elétron. Pela figura 1.5 vemos que o eixo de simetria bisecta o suplemento ângulo de espalhamento, de modo que as direções inicial e final da trajetória fazem ângulos iguais a $-\alpha$ e α em relação ao eixo de simetria, respectivamente, onde $\alpha = (\pi - \psi)/2$.

Podemos analisar o efeito da força Coulombiana sobre a partícula, considerando a variação do momentum linear do elétron $\mathbf{\Delta p} = \mathbf{p}_f - \mathbf{p}_i$, onde $p_i = p_f = m_e c_0$, já que o espalhamento é elástico. Usando a lei dos senos no triângulo vetorial da Fig. 1.5 obtemos

$$\frac{\Delta p}{\sin\psi} = \frac{p}{\sin\alpha}, \tag{1.86}$$

donde

$$\frac{\Delta p}{p} = 2\sin\left(\frac{\psi}{2}\right). \tag{1.87}$$

A componente da força Coulombiana na direção de $\mathbf{\Delta p}$ é $F\cos\theta$, onde θ é o ângulo medido em relação ao eixo de simetria [Fig. 1.5]. A variação do momentum linear do elétron será, assim

$$\Delta p = \int_{-\infty}^{\infty} F\cos\theta dt = K r_0 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos\theta dt}{r^2} = K r_0 \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{\cos\theta d\theta}{r^2\dot{\theta}} = \tag{1.88}$$

onde usamos (1.85).

Como a força Coulombiana é central, sabemos da Mecânica Clássica [**?**] que: (i) o momentum angular é conservado; (ii) a trajetória da partícula é uma curva cônica no plano (no caso, um ramo de hipérbole). O ponto de máxima aproximação entre o elétron e o íon positivo terá coordenadas $(r_0, \theta = 0)$, e é o vértice da hipérbole. Já o momentum angular da partícula é, em coordenadas polares (r, θ) [?]

$$L = m_e r^2 \dot{\theta} = const. \tag{1.89}$$

e pode ser igualado ao momentum angular inicial, que é $bp_i = bp$. Assim

$$\dot{\theta} = \frac{bp}{m_e r^2}. \tag{1.90}$$

Substituindo em (1.88) teremos

$$\Delta p = \frac{r_0 p}{2b} \int_{-\alpha}^{\alpha} \cos\theta d\theta = \frac{r_0 p}{b} \cos\left(\frac{\psi}{2}\right). \tag{1.91}$$

Comparando este resultado com (1.87) obtemos uma relação entre o ângulo de espalhamento e o parâmetro de impacto:

$$\tan\left(\frac{\psi}{2}\right) = \frac{r_0}{2b}. \tag{1.92}$$

1.6.2 Seção de choque colisional para grandes ângulos

De forma algo arbitrária, podemos definir uma colisão a grandes ângulos de espalhamento quando $\psi > \pi/2$, e a pequenos ângulos se $\psi < \pi/2$. Se $\psi = \pi/2$ a relação (1.92) indica que o parâmetro de impacto correspondente é

$$b_{90} = \frac{r_0}{2} = \frac{1}{8\pi\varepsilon_0} \frac{e^2}{K} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{e^2}{m_e c_0^2}, \tag{1.93}$$

onde usamos (1.84). Assim

$$\tan\left(\frac{\psi}{2}\right) = \frac{b_{90}}{b}, \tag{1.94}$$

de tal maneira que, se $b < b_{90}$ tenhamos $\psi > \pi/2$ (colisões a "grandes" ângulos) e, se $b > b_{90}$, $\psi < \pi/2$ (colisões a "pequenos" ângulos).

Como tipicamente elétrons de diversas velocidades e parâmetros de impacto são espalhados pelos íons dispersos no interior do plasma, é necessário dar uma interpretação estatística aos fenômenos colisionais. Supondo que os elétrons incidam numa lâmina de área A e espessura dx contendo n_i íons por unidade de volume. Dependendo do seu ângulo de espalhamento ψ, os elétrons podem perder uma fração maior ou menor do seu momentum linear.

Podemos, numa primeira aproximação, imaginar os íons como sendo discos opacos com área efetiva σ (chamada seção de choque), tal que se um elétron incide dentro desta área ele perderá todo seu momentum linear. Como o número de íons na lâmina é $n_i A dx$, a área que efetivamente bloqueia o momentum linear dos elétrons é $n_i A \sigma dx$, e a fração da área lâmina que bloqueia os elétrons será portanto $n_i \sigma dx$.

Considerando que um fluxo $\Gamma(x)$ de elétrons esteja incidindo numa lâmina que vai de x até $x + dx$, o fluxo que emerge no seu lado oposto é

$$\Gamma(x + dx) = \Gamma(x)\left(1 - n_i \sigma dx\right), \tag{1.95}$$

de modo a variação do fluxo com a distância é dada pela solução da seguinte equação diferencial

$$\frac{d\Gamma}{dx} = -n_i \sigma \Gamma, \tag{1.96}$$

que pode ser facilmente integrada fornecendo

$$\Gamma = \Gamma_0 e^{-x/\ell_{ei}}, \tag{1.97}$$

onde definimos o comprimento livre médio para as colisões elétron-íon

$$\ell_{ei} = \frac{1}{n_i \sigma}. \tag{1.98}$$

Assim, sendo c_0 a velocidade do elétron, o tempo médio entre colisões elétron-íon será

$$t_{ei} = \frac{\ell_{ei}}{c_0}, \tag{1.99}$$

de modo que a frequência colisional seja

$$\frac{1}{\tau_{ei}} = \frac{c_0}{\ell_{ei}} = n_i \sigma c_0 \approx n_e \sigma c_0, \tag{1.100}$$

onde usamos a quase-neutralidade do plasma ($n_e \approx n_i$).

Na subseção anterior vimos que, para parâmetros de impacto menores do que b_{90}, as colisões ocorrem a grandes ângulos de espalhamento. Neste caso é razoável imaginar que a seção de choque é um disco de raio b_{90}, ou seja,

$$\sigma = \pi b_{90}^2 = \frac{e^4}{16\pi \varepsilon_0^2 m_e^2 c_0^3}. \tag{1.101}$$

Assim a frequência de colisões a grandes ângulos será

$$\frac{n_e e^4}{16\pi \varepsilon_0^2 m_e^2 c_0^3}. \tag{1.102}$$

1.6.3 Seção de choque colisional para pequenos ângulos

Como num plasma há Λ_s partículas da espécie s dentro da esfera de Debye, é possível dizer que uma partícula carregada sofre Λ_s colisões simultâneas. Destas colisões, um certo número será a grandes ângulos, com frequência dada por (1.102), e o restante a pequenos ângulos. As colisões a grandes ângulos envolvem valores altos da energia potencial de interação, em comparação com a energia cinética das partículas. Pela definição de plasma dada por Nicholson, a energia potencial deve ser muito menor do que a cinética, de modo que uma partícula tipicamente sofre muito mais colisões a baixos ângulos do que a grandes ângulos [3]. Assim a estimativa dada por (1.102) não é boa para nossos propósitos. De fato, o efeito cumulativo das muitas colisões a pequenos ângulos é muito mais importante do que as relativamente raras colisões a grandes ângulos.

Uma análise detalhada, considerando o efeito estatístico cumulativo de colisões a baixos ângulos, mostra que a frequência das colisões elétron-íon é corrigida, em relação ao resultado (1.102), pelo fator $\ln\Lambda_e$ (chamado "logaritmo Coulombiano"), onde Λ_e é o parâmetro de plasma eletrônico

$$\Lambda_e = n_0 \lambda_{De}^3. \tag{1.103}$$

O motivo deste fator de correção é a existência de Λ_e elétrons dentro de uma esfera de Debye (de raio λ_{De} centrada no íon positivo. Se o parâmetro de impacto for maior que o comprimento de Debye o elétron praticamente não toma conhecimento da carga do íon positivo, que é blindada pelos Λ_e elétrons dentro da esfera de Debye. Assim, devemos considerar colisões a baixos ângulos aquelas que ocorrem dentro do seguinte intervalo de parâmetros de impacto: $b_{min} = b_{90}$ e $b_{max} = \lambda_{De}$, o que leva à integral [cf. [3], pg. 13]:

$$\int_{b_{min}}^{b_{max}} \frac{db}{b} = \ln\left(\frac{\lambda_{De}}{b_{90}}\right). \tag{1.104}$$

Como o logaritmo é uma função de variação bastante lenta podemos, ao substituir b_{90} por (1.93), usar a velocidade térmica eletrônica no lugar de c_0, de modo que

$$\frac{\lambda_{De}}{b_{90}} \approx \frac{\lambda_{De} m_e c_{Te}^2}{2e^2} \approx \frac{m_e \lambda_{De}^3 \omega_e^2}{2e^2} \approx 2\pi n_0 \lambda_{De}^3 = 2\pi\Lambda_e.$$

Sendo $\Lambda_e \gg 2\pi$ temos que a integral (1.104) é, aproximadamente, $\ln\Lambda_e$.

Multiplicando a frequência para grandes ângulos de espalhamento (1.102) pelo logaritmo Coulombiano teremos, assim, a frequência colisional para pequenos ângulos de espalhamento

$$\nu_{ei} = \frac{n_e e^4 \ln\Lambda_e}{16\pi\varepsilon_0^2 m_e^2 c_0^3}. \tag{1.105}$$

Devido à distribuição de velocidades, num plasma há elétrons com uma grande variedade de valores das velocidades iniciais c_0. Podemos, neste caso, substituir c_0 pela velocidade térmica dos elétrons (1.9), obtendo assim a relação

$$\nu_{ei} = \frac{n_e \pi e^4 \ln\Lambda_e}{(4\pi\varepsilon_0)^2 m_e^{1/2} (k_B T_e)^{3/2}}. \tag{1.106}$$

Usando (1.29), (1.38) e (1.52) obtemos a seguinte relação entre a frequência colisional, a frequência de plasma eletrônica e o parâmetro de plasma correspondente

$$\frac{\nu_{ei}}{\omega_{pe}} = \frac{2}{3}\frac{\ln\Lambda_e}{\Lambda_e} \sim \frac{1}{\Lambda_e} \ll 1, \tag{1.107}$$

uma vez que $\Lambda_e \gg 1$. Concluimos que a frequência colisional entre elétrons e íons é muito menor do que a frequência de plasma eletrônica. Uma fórmula prática para a frequência colisional elétron-íon é

$$\nu_{ei} = 2,18 \times 10^{-11} n_e (k_B T_e)^{-3/2} \ln\Lambda_e. \tag{1.108}$$

Se considerarmos, agora, colisões entre íons e elétrons, como os íons estão supostamente em repouso podemos fazer uma mudança de referencial de modo que a velocidade dos íons incidentes seja $\mathbf{c}_i = -\mathbf{c}_e$. Em ambos os casos, no entanto, a força (taxa temporal de transferência de momentum) é a mesma. Como

$$F_{col} = -\left(\frac{dp}{dt}\right)_{col} = -\nu_c p, \tag{1.109}$$

onde ν_c é a frequência colisional, temos que

$$p_e \nu_{ei} = p_i \nu_{ie}, \tag{1.110}$$

de forma que a frequência colisional entre íons e elétrons é

$$\nu_{ie} = \frac{m_e n_e c_e}{m_i n_i c_i} \nu_{ei} \approx \frac{m_e}{m_i} \nu_{ei}, \tag{1.111}$$

onde usamos a quase-neutralidade do plasma ($n_e \approx n_i = n_0$).

Colisões entre elétrons e elétrons podem ser tratadas de forma semelhante ao que fizemos para elétrons e íons, mas desta vez temos de levar em conta o movimento do alvo. Os cálculos podem ser feitos no referencial do centro de massa do sistema, e o resultado é que a frequência respectiva é da mesma ordem de grandeza, a saber [3]:

$$\nu_{ee} \approx \frac{1}{\sqrt{2}} \nu_{ei} \sim \nu_{ei} \tag{1.112}$$

Considerando, agora, colisões entre íons e íons à mesma temperatura que elétrons com frequência colisional ν_{ee}, podemos obter a frequência correspondente ν_{ii} adaptando (1.105). Trocamos m_e por m_i e usando $c_{Ti} = (m_e/m_i)^{1/2} c_{Te}$ no lugar de c_0, obtemos que

$$\nu_{ii} \approx \sqrt{\frac{m_e}{m_i}} \nu_{ee}. \tag{1.113}$$

1.6.4 Condutividade elétrica

Em termos macroscópicos, as colisões entre as partículas de um plasma são responsáveis pela sua resistividade. Vamos, assim, considerar um conjunto de elétrons mergulhados num campo elétrico externo **E**: eles tendem a ser acelerados pelo campo elétrico e desacelerados pelas colisões aleatórias com íons e também outros elétrons. No entanto, as colisões entre elétrons não provocam uma transferência líquida de momentum. Assim é suficiente considerar as colisões entre elétrons e íons, que provocam coletivamente uma força de arrasto sobre os elétrons que é proporcional à frequência colisional:

$$F_{col} = -\left(\frac{dp}{dt}\right)_{col} = -\nu_{ei} m_e c_d, \tag{1.114}$$

onde c_d é a velocidade de deriva dos elétrons devido ao ganho líquido de momentum obtido nas suas colisões com os íons.

A equação de movimento para os elétrons será, assim

$$\frac{dp}{dt} = m_e \frac{dc_d}{dt} = -eE + F_{col} = -eE - \nu_{ei} m_e c_d. \tag{1.115}$$

No estado estacionário a velocidade de deriva será constante (a força elétrica é contrabalançada pela força de arrasto):

$$c_d = -\frac{eE}{m_e \nu_{ei}}. \tag{1.116}$$

O movimento de deriva para o fluxo de elétrons pode ser associado a uma densidade de corrente elétrica

$$J = -e n_e c_d = \frac{n_e e^2 E}{m_e \nu_{ei}} = \sigma E, \tag{1.117}$$

onde introduzimos a condutividade (DC) do plasma

$$\sigma = \frac{n_e e^2}{m_e \nu_{ei}}. \tag{1.118}$$

A resistividade será o inverso da condutividade:

$$\eta = \frac{m_e \nu_{ei}}{e^2 n_e}, \tag{1.119}$$

com a seguinte fórmula prática

$$\eta = 3,55 \times 10^7 \, \nu_{ei} n_e^{-1}. \tag{1.120}$$

De (1.106) a resistividade do plasma é proporcional a $T_e^{-3/2}$. Se tentarmos aquecer um plasma ohmicamente (passando uma corrente através dele) este procedimento só funcionará a contento para baixas temperaturas. Na medida em que já temos altas temperaturas, a resistividade do plasma torna-se tão baixa que ele é praticamente um condutor perfeito, aproximação esta muito comum na magnetohidrodinâmica. Além disso, devido à baixa resistividade, a eficiência do aquecimento ôhmico é muito pequena, de modo que necessitamos formas adicionais (não-indutivas) de aquecimento do plasma, como injeção de partículas neutras ou aplicação de ondas eletromagnéticas.

1.7 Plasmas na magnetohidrodinâmica

Plasmas existem na natureza e no laboratório dentro de uma ampla gama de densidades e temperaturas [Fig. 1.6]. Por diversos motivos, no entanto, apenas alguns plasmas são de interesse para a magnetohidrodinâmica. Vamos apresentar, nesta seção, dois exemplos em áreas diferentes da física de plasmas.

1.7.1 Plasmas de fusão

Segundo dados recentes (2019) cerca de 80% da matriz energética mundial é composta por combustíveis fósseis (não-renováveis): 31% petróleo, 26% carvão e 22% gás natural [?]. Mantida a atual demanda de energia, estima-se que o estoque disponível de combustíveis fósseis poderá estar virtualmente esgotado em menos de um século. Será necessário o uso em grande escala de fontes alternativas de energia e que sejam tanto economicamente viáveis como ecologicamente corretas. Várias fontes de energia como eólica, fotovoltaica, etc. são ainda economicamente adequadas apenas para demandas reduzidas. A fissão nuclear, que é uma fonte de energia economicamente sustentável, envolve a produção de resíduos radioativos com vida média muito alta, gerando grandes preocupações ambientais relacionadas à sua armazenagem, assim como à própria segurança da sua produção, em vista da possibilidade de desastres como os de Chernobyl e Fukushima.

Reações de fusão nuclear

Neste contexto desafiador, a fusão nuclear é uma alternativa interessante a ser considerada a longo prazo. Numa reação de fusão dois núcleos leves se combinam para

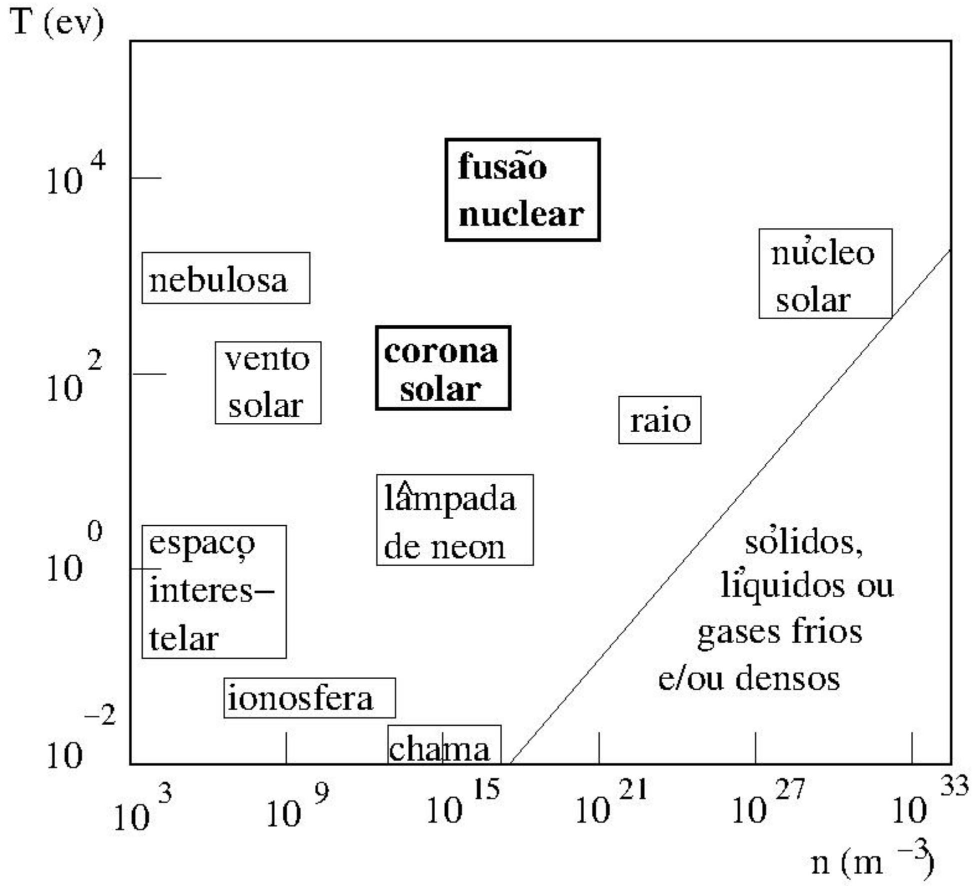

Figura 1.6: Vários tipos de plasmas conforme a sua densidade e temperatura. Os plasmas indicados em negrito têm especial interesse na magnetohidrodinâmica.

formar um núcleo mais pesado. A diferença de massa Δm entre os reagentes e os produtos corresponde a uma quantidade de energia $\Delta\mathcal{E} = \Delta mc^2$, onde $c = 2,9979 \times 10^8 m/s$ é a velocidade da luz no vácuo. A equivalência é de $932,8\,MeV$ por unidade de massa atômica ($1,6605 \times 10^{-27}\,kg$). Esta quantidade de energia pode, em princípio, ser aproveitada num reator para gerar energia elétrica.

A fusão nuclear é o processo pelo qual as estrelas geram energia na forma de luz e calor, onde núcleos de Hidrogênio e seus isótopos (deutério $^2D_1$ e trítio $^3T_1$) se combinam para formar núcleos mais pesados, como o Hélio, bem como nêutrons (n^0) e prótons (p^+). As reações de fusão nuclear com maiores seções de choque são as seguintes [4] [2]

1. reação deutério-trítio (D-T)

$$^2D_1 + ^3T_1 \rightarrow ^4He_2\,(3,5\,MeV) + n^0\,(14,1\,MeV),$$

2. reações deutério-deutério (D-D, 50% de probabilidade para cada uma)

$$^2D_1 + ^2D_1 \rightarrow ^3T_1\,(1,01\,MeV) + p^+\,(3,02\,MeV),$$

$$^2D_1 + ^2D_1 \rightarrow ^3He_2\,(0,82\,MeV) + n^0\,(2,41\,MeV),$$

3. reação deutério-hélio (D-He)

$$^2D_1 + ^3He_2 \rightarrow ^4He_2 + p^+\,(18,2\,MeV).$$

Considerando, por exemplo, a reação D-T, que produz um total de $17,6MeV$ de energia, a fusão de 1 g de trítio e 2/3 g de deutério seria capaz de gerar até $1,6 \times 10^5$ kW-h de energia térmica [5]. Esta energia poderia alimentar por um dia inteiro uma cidade com 160 mil habitantes, supondo um consumo médio mensal de 120 kW-h de uma residência com quatro moradores. Por vários motivos, além deste, a fusão nuclear controlada é considerada uma alternativa possível para resolver a crise energética que se avizinha para a Humanidade.

Ao contrário dos combustíveis usados na fissão nuclear, como Urânio e Plutônio, cuja mineração, processamento e enriquecimento são processos caros e tecnologicamente complicados, o deutério pode ser extraído da água do mar (onde existe na proporção de 30 g por metro cúbico). O trítio pode ser obtido no próprio reator a fusão, por meio da combinação entre os nêutrons produzidos pela reação de fusão e núcleos de Lítio:

$$n^0 + ^6Li_3 \rightarrow ^3T_1 + ^4He_2,$$

$$n^0 + ^7Li_3 \rightarrow ^3T_1 + ^4He_4 + n^0,$$

O Lítio encontrado abundantemente na Natureza consiste de $7,5\%$ de $^6Li_3$ e $92,5\%$ de $^7Li_3$ [5]. Mesmo sendo o trítio um isótopo radioativo, sua vida média é baixa (da ordem de $12,5$ anos), o que simplifica o armazenamento dos resíduos radioativos.

A ocorrência de reações de fusão depende da superação da barreira de repulsão Coulombiana existente entre os núcleos, ou seja, há uma barreira energética que deve ser excedida para que os núcleos leves possam se aproximar o suficiente para se fundir. Para que isso ocorra é necessário aquecer o combustível da fusão a altas temperaturas.

[2] Ao lado de cada núcleo resultante está indicado, entre parênteses, a sua energia cinética.

Na reação D-T, por exemplo, a temperatura deve ser maior que 5×10^7 K para que uma haja uma taxa significativamente grande de reações de fusão nuclear [5]. Nestas temperaturas, os gases ionizam-se de modo a formarem um plasma de altas temperaturas.

Um futuro reator a fusão nuclear deve ser capaz de confinar um plasma nessas condições por um tempo suficientemente longo. Voltando ao exemplo da reação D-T, os $17,6MeV$ de energia produzida por reação são distribuidos na forma de energia cinética do nêutron ($14,1MeV$) e da partícula alfa ($3,5MeV$). Ambas as partículas deixam o interior do plasma após algum tempo e depositam sua energia na forma de calor devido a colisões com o material que envolve o plasma. A energia térmica gerada, por sua vez, é convertida de forma convencional em energia elétrica, de forma parecida com a de um reator a fissão nuclear. Além disso, parte dos nêutrons pode ser capturada por um cobertor de Lítio para a produção de Trítio a fim de sustentar a própria reação de fusão nuclear com o Deutério.

Critério de Lawson

A produção auto-sustentável de reações de fusão nuclear num plasma (de deutério e trítio, por exemplo) só ocorre se as espécies envolvidas tiverem densidade e temperatura suficientemente altas, e por um tempo suficientemente longo. O plasma termonuclear, entretanto, perde energia devido a vários fatores, como o transporte de calor em seu interior e a radiação emitida pelos elétrons quando são desacelerados. Por este motivo, é necessário compensar esta perda através de um aquecimento externo.

Define-se o fator de amplificação de potência Q como a razão entre a potência produzida pelas reações de fusão nuclear dividida pela potência produzida pelas fontes de aquecimento externo. A situação de empate ("breakeven"), quando a potência associada ao aquecimento compensa exatamente a produzida por fusão, corresponde a $Q = 1$. Uma outra situação, chamada ignição, corresponde a uma reação de fusão auto-sustentada, não mais necessitando um aquecimento externo, de modo que o fator $Q \to \infty$ neste caso.

Um plasma termonuclear onde ocorre a reação D-T terá íons de Deutério e Trítio, bem como elétrons livres. Seja $n_i = n_d + n_t$ a densidade total de íons. A energia média das partículas do plasma à temperatura T é, de (1.11), $3k_BT/2$. Como há um mesmo número de íons e elétrons livres, supondo que todas as espécies estejam à mesma temperatura, a energia do plasma será $3nk_BT_i$ por unidade de volume, de modo que a energia total seja [6]

$$W = \int d^3x\, 3n_ik_BT_i = 3\langle n_ik_BT_i \to V, \tag{1.121}$$

onde os parênteses angulares denotam médias em relação às velocidades das partículas, e V é o volume do plasma.

A taxa de perda de energia, por sua vez, é dada por

$$P_L = \frac{W}{\tau_E}, \tag{1.122}$$

onde τ_c é o tempo de confinamento da energia do plasma. Se a potência produzida por reações termonucleares for muito pequena, a taxa de perda de energia é contrabalanceada pela potência P_H usada no aquecimento externo do plasma, de modo que (1.121) e (1.122) levam a uma expressão para o tempo de confinamento

$$\tau_E = \frac{W}{P_H} \tag{1.123}$$

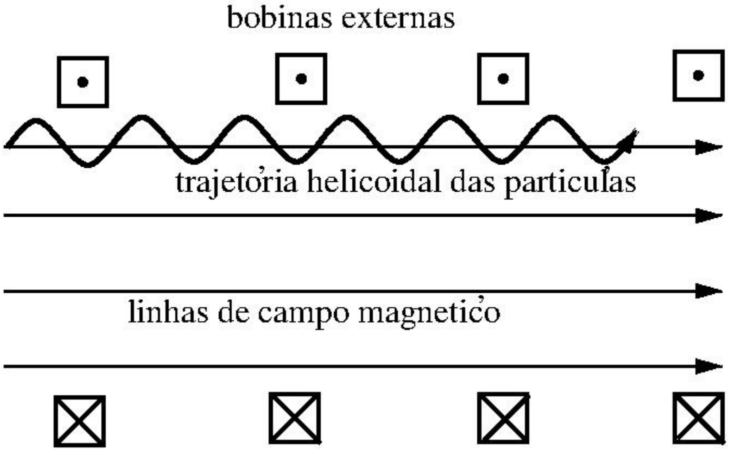

Figura 1.7: Representação esquemática de um sistema aberto de confinamento magnético de plasmas.

Nas reações D-T, são produzidos nêutrons e partículas alfa. Os primeiros, por serem eletricamente neutros, deixam o plasma rapidamente, mas os segundos, sendo carregados, incorporam-se ao plasma e transferem a ele sua energia ($3,5MeV$). Este processo pode ser encarada como uma fonte de aquecimento do plasma por partículas alfa, com potência associada P_α. Assim a perda de energia do plasma é compensada pela potência externa P_H mais a potência associada ao aquecimento por partículas alfa:

$$P_H + P_\alpha = P_L. \tag{1.124}$$

Quando um plasma D-T é aquecido a uma temperatura suficientemente alta, não será mais necessário ter uma fonte externa de energia, de forma que a perda de energia é inteiramente compensada pelo aquecimento por partículas alfa. Nesse caso a fonte externa de aquecimento poderá ser removida e a reação termonuclear será auto-sustentada, que é a condição de ignição. Lawson, em 1955, estabeleceu um critério para a ignição à temperatura $k_B T_i = 30keV$: o produto da densidade n_i, do tempo de confinamento τ_E deve ser maior do que um valor mínimo [7]

$$n_i \tau_E > 1,5 \times 10^{20}\, s/m^3. \tag{1.125}$$

Uma forma alternativa deste critério, bastante utilizada na prática, envolve o "triplo produto" $n_i T_i \tau_E$ quando a temperatura encontra-se na faixa dos 10 a $20keV$ [6]:

$$n_i T_i \tau_E > 3 \times 10^{21}\, s.keV/m^3. \tag{1.126}$$

Tomando como exemplo um plasma D-T à temperatura $k_B T_i = 10keV$ e com densidade $n_i = 10^{20} m^{-3}$, o tempo mínimo de confinamento será igual a $3s$. Isto implica na necessidade de projetar sistemas de confinamento de plasmas de fusão que permitam o desenvolvimento futuro de reatores que produzam energia elétrica a um nível tecnologicamente viável.

Confinamento magnético

Não é possível confinar um plasma de fusão, a temperaturas da ordem de $10^8 K$, simplesmente colocando-o numa câmara fechada pois seu contacto com uma parede material diminuiria rapidamente sua temperatura. O confinamento magnético de plasmas

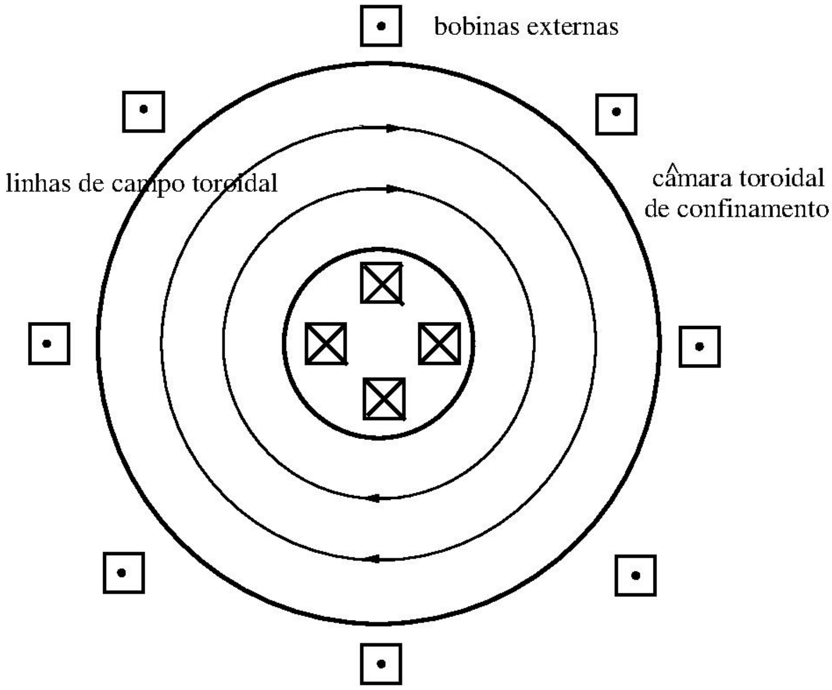

Figura 1.8: Representação esquemática de um sistema fechado de confinamento magnético de plasmas.

é uma das opções mais viáveis para um futuro reator a fusão. A ideia básica é a de que partículas carregadas (como os íons e elétrons de um plasma) sob a ação de um campo magnético externo, movem-se em trajetórias espirais ao longo da direção das linhas de força do campo magnético.

Sistemas abertos de confinamento magnético têm linhas de força também abertas [Fig. 1.7]. Como as partículas do plasma espiralam ao longo das mesmas, seria esperado que elas se perdessem nas extremidades do sistema. No entanto, podemos empregar o chamado efeito "espelho magnético", que faz com que partículas sejam refletidas em regiões onde o campo magnético é suficientemente intenso. Numa garrafa magnética as bobinas são projetadas de forma a criar tais regiões nas extremidades do sistema, de modo que as partículas sejam refletidas nestas regiões, permanecendo confinadas no interior do sistema por um determinado tempo.

Se criarmos um campo magnético por meio de bobinas exteriores ao plasma, tal que as linhas de força sejam fechadas, as partículas do plasma que espiralam ao longo das mesmas poderiam permanecer no interior da câmara de confinamento por um tempo arbitrariamente longo. Um conjunto de bobinas pode ser projetado para gerar um campo magnético toroidal **B** no interior de uma câmara de confinamento na forma de um toróide [Fig. 1.8].

No entanto, há fatores que conspiram contra este comportamento, produzidos pela curvatura e pela não-uniformidade das linhas de campo magnético. Estes fatores levam ao aparecimento de derivas que retiram as partículas das trajetórias espirais. Se não forem compensados, estes fatores levam à perda das partículas devido às suas colisões com a parede da câmara de confinamento.

Uma forma de compensar estas derivas é superpor ao campo toroidal um campo poloidal $\mathbf{B}_P$, de forma que o campo magnético resultante $\mathbf{B} = \mathbf{B}_T + \mathbf{B}_P$ tenha linhas de

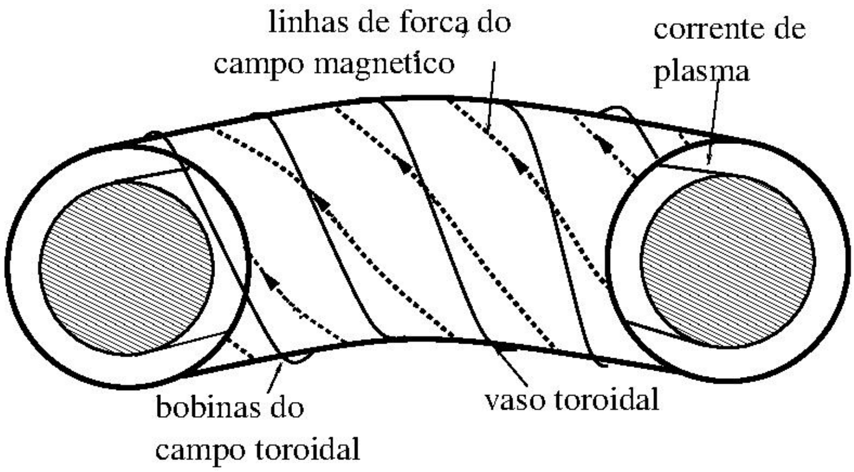

Figura 1.9: Figura esquemática de um Tokamak. Não é mostrado o transformador que produz a corrente de plasma.

força helicoidais. Considerando câmaras de confinamento toroidais, quando o campo poloidal é gerado por bobinas externas o sistema é chamado "stellarator". Já quando o campo poloidal é gerado pela própria corrente de plasma (na direção toroidal), o sistema é chamado "tokamak". Existem, ainda, configurações de toróides compactos como o "spheromak" que não têm campos toroidais gerados externamente [8].

Tokamaks

Dos vários esquemas propostos para o confinamento magnético de plasmas, um dos mais promissores é o chamado Tokamak [3], que consiste numa câmara toroidal [Fig. 1.9] onde uma corrente de plasma é formada pela ação indutiva de um transformador, e confinada pela ação combinada de dois campos magnéticos básicos [6]. Um deles, o chamado campo magnético toroidal $\mathbf{B}_T$, é produzido por bobinas enroladas em volta da câmara toroidal, e outro, o campo magnético poloidal $\mathbf{B}_P$, é produzido pela própria corrente de plasma. A combinação de ambos, $\mathbf{B}_T + \mathbf{B}_P$, produz linhas de campo helicoidais, permitindo o confinamento do plasma.

Os Tokamaks costumam ser caracterizados geometricamente pelo raio maior e menor da câmara toroidal, bem como pelo módulo do campo toroidal B_T e pela sua corrente de plasma. Na Tabela 1.7.1 listamos estas características para alguns tokamaks em operação na atualidade. Há uma excelente compilação ("All the World's Tokamaks"), disponível na internet no endereço `www.tokamak.info`, e que lista propriedades de 226 tokamaks em todo o mundo.

Vamos, neste capítulo, considerar os seguintes valores típicos de plasmas confinados em Tokamaks

$$n_i \sim 10^{20} m^{-3}, \qquad k_B T_i \sim 10^3 eV, \tag{1.127}$$

para os quais a velocidade térmica iônica é, de (1.14), da ordem de 10^5 m/s. Supondo

[3] É um acrônimo formado a partir das palavras (em russo) **to**roidalnaya **ka**mera s **ma**gnitnami **k**atushkami, que significa câmara toroidal com bobinas magnéticas. O seu conceito foi idealizado por Andrei Sakharov e Igor Tamm no Instituto Kurchatov de Moscou por volta de 1950. Os primeiros Tokamaks foram construídos neste mesmo instituto no final da década de 1950, sob a liderança de Lev Artsimovich.

Nome	País	Raio maior (m)	Raio menor (m)	Campo toroidal (T)	Corrente de plasma (MA)
T-10	Rússia	1,5	0,37	4,5	0,7
TFTR	EUA	2,4	0,80	5,0	2,2
JET	UK	3,0	1,25	3,5	7,0
DIII-D	EUA	1,7	0,67	2,1	2,1
Tore Supra	França	2,4	0,80	4,5	2,0
ASDEX-U	Alemanha	1,7	0,50	3,9	1,4
JT60-U	Japão	3,4	1,1	4,2	5,0
EAST	China	1,7	0,4	3,5	1,0
ITER*	França	6,2	2,15	5,3	22
TCABR	Brasil	0,61	0,18	1,1	0,1

Tabela 1.1: Características de alguns tokamaks atualmente em operação. Adaptado de [5, 9]. * O início esperado para sua operação é 2025.

$n_e = n_i$ e $T_e = T_i$ a velocidade térmica eletrônica, de (1.13), será da ordem de 10^7 m/s. Apesar de muito altas, estas velocidades ainda podem ser tratadas no regime não-relativístico.

Já o comprimento de Debye é da ordem de $2 \times 10^{-3} m$. Nos Tokamaks o comprimento característico é da ordem de $L \sim 1m$, de modo que é verificada a condição (1.36) para a quase-neutralidade do plasma. O parâmetro de plasma eletrônico é 5×10^6, verificando assim o critério (1.45), que prescreve um alto número de partículas dentro da esfera de Debye. Os campos magnéticos são da ordem de $1\,T$, de modo a girofrequência e o raio de Larmor são da ordem de

$$\omega_{ce} \sim 2 \times 10^{11}\,s^{-1}, \qquad r_e \sim 2 \times 10^{-4}\,m.$$

A frequência colisional elétron-íon é $\sim 30s^{-1}$. Nestas condições, a resistividade é da ordem de $10^{-8}\,\Omega.m$, comparável ao Cobre à temperatura ambiente.

O tokamak de melhor desempenho na atualidade (2019) é o JET ("Joint European Torus"), operando em Culham (Reino Unido), onde já foram conseguidas descargas $D-D$ e $D-T$ na região de empate ($Q = 67$). Espera-se que a condições próximas à ignição ($Q = 10$) seja conseguida pelo futuro tokamak ITER ("International Thermonuclear Experimental Reactor"), atualmente em construção em Cadarache (França), como resultado de uma grande cooperação internacional sob o patrocínio da Agência Internacional de Energia Atômica. Maiores detalhes podem ser obtidos no endereço `www.iter.org`. Na Figura 1.10 estão representados os valores do produto $n_i \tau_E$ (em $10^{20} m^{-3}.s$) *versus* a temperatura iônica $k_B T_i$ (em keV) para descargas $D-D$ e $D-T$ em diversos tokamaks [vide Tabela 1.7.1], incluindo o próprio JET. O sucessor do ITER já será um reator a fusão termonuclear denominado DEMO ("Demonstration Power Plant"), cujo propósito será a produção de eletricidade a nível ainda experimental na faixa de 300 a 500 MW. Enquanto o ITER tem sua operação prevista para começar em 2025, o DEMO (ainda em projeto) só deve começar a operar a partir de 2044.

No Brasil o primeiro tokamak (TBR-1) foi construido em 1977 no Laboratório de Física de Plasmas do Instituto de Física da Universidade de São Paulo, tendo operado até 1999. Foi substituido pelo tokamak TCABR, ainda em operação, e que foi construído para estudos de aquecimento auxiliar, regime de operação de alto confinamento e turbulência na borda do plasma, entre outros objetivos [10]. Além destes, operam no

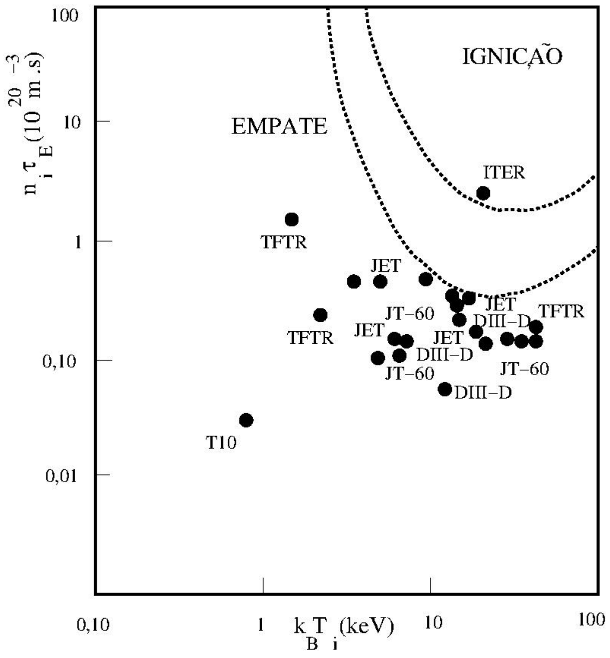

Figura 1.10: Densidade iônica vezes o tempo de confinamento em função da temperatura iônica para diversos tokamaks sob reações de fusão dos tipos $D-T$ e $D-D$. Os limiares para empate e ignição estão representadas em linhas tracejadas.

Brasil outros dois tokamaks: o tokamak esférico ETE, no Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais, em Sao José dos Campos, e o tokamak NOVA, no Instituto de Física da Universidade Federal do Espírito Santo.

Devido às suas características de alta temperatura e à presença necessária de campos magnéticos intensos, a magnetohidrodinâmica tem sido intensivamente empregada para o estudo de fenômenos a baixas frequências em plasmas de fusão, sobretudo aqueles relacionados ao equilíbrio. Uma condição necessária (embora não suficiente) para a obtenção de plasmas de fusão é a de que tenhamos um equilíbrio magnetohidrodinâmico com uma razoável estabilidade. Por este motivo, o estudo do confinamento magnético de plasmas de fusão é uma das principais motivações da magnetohidrodinâmica.

1.7.2 Plasmas solares

O Sol

O Sol é uma estrela de tamanho e luminosidade intermediárias, com uma magnitude absoluta $4,8$ [11]. O seu raio é $6,96 \times 10^8 m$ e ela gira com um período que depende da latitude, variando de 25 dias no equador a 36 dias nos pólos. A massa do Sol é de cerca de $2 \times 10^{30} kg$, consistindo basicamente de Hidrogênio (90%) e Hélio (10%) e outras espécies $(0,1\%)$. O núcleo do Sol, que ocupa cerca de um quarto do raio solar [Fig. 6.6] mas contèm 34% da massa total, é a região mais interna do Sol. No interior do núcleo a temperatura $(15 \times 10^6 K)$ e a densidade do Hidrogênio [4] são tão grandes que o

[4]Corresponde a uma massa específica de $150 g/cm^3$, ou seja, 150 vezes maior que a densidade da água!

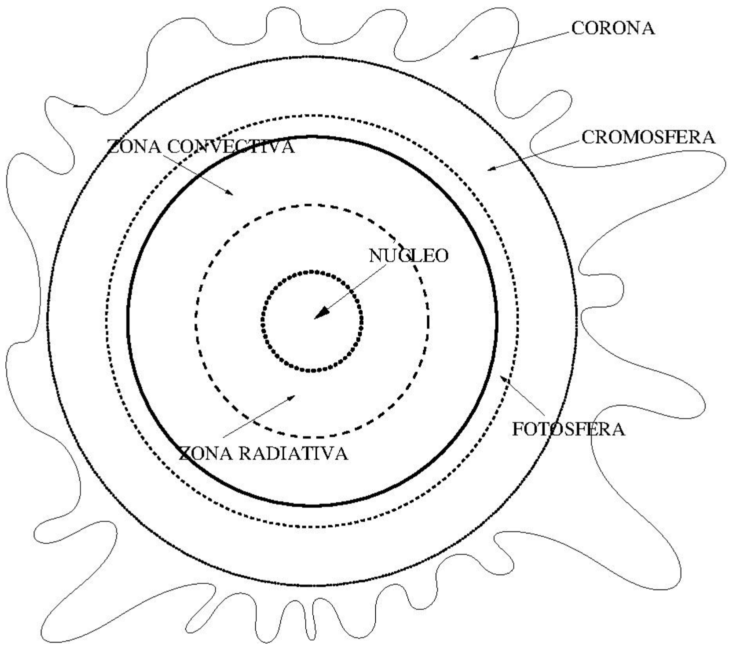

Figura 1.11: Figura esquemática das partes constituintes do Sol.

mesmo está completamente ionizado (prótons e elétrons), e ocorrem as condições vistas anteriormente para a ocorrência de reações de fusão nuclear. Este processo envolve a fusão próton-próton diretamente criando, ao longo de uma série de etapas, núcleos de Hélio e uma variedade de partículas elementares.

A energia gerada por estas reações de fusão nuclear escapa inicialmente por radiação (através da chamada zona radiativa) e depois por convecção (pela zona convectiva) [Fig. 6.6] [11]. A energia propaga-se pela zona radiativa na forma de fótons de alta energia (raios gama). A matéria na zona radiativa, no entanto, é tão densa que os fótons são absorvidos e espalhados por outras partículas, aumentando seus comprimentos de onda até emergir como luz visível e ser irradiada para o espaço. Leva um tempo da ordem de 171 mil anos para que os raios gama atravessem a zona radiativa. A temperatura do plasma na zona radiativa diminui de $15 \times 10^6 K$ para $1,5 \times 10^6 K$ na base da zona convectiva. Dentro desta última, formam-se rolos de convecção onde o plasma quente tem movimento ascendente e esfria, tendo o plasma mais frio um movimento descendente. .

A atmosfera Solar é dividida em três partes: a fotosfera, a cromosfera e a corona [Fig. 6.6]. A parte visível da superfície do Sol é a sua fotosfera, que é uma casca esférica relativamente delgada (de espessura $\sim 500km$) com uma temperatura de cerca de $5700K$ e densidade de 10^{23} partículas por metro cúbico. O Hidrogênio na fotosfera não é totalmente ionizado (taxa de ionização de apenas 3%), fazendo com que esteja praticamente na forma atômica.

Imediatamente acima da fotosfera encontra-se a cromosfera, que é a parte mais interna da atmosfera solar (estendendo-se até uma distância de $2500km$ da fotosfera), onde a temperatura é da ordem de $10^4 K$. Após a cromosfera encontra-se a corona solar, onde a temperatura atinge valores muito maiores ($10^6 K$), e da qual falaremos com mais detalhes adiante.

O Sol é uma estrela magnética: o campo magnético na sua superfície tem uma inten-

Figura 1.12: Imagem da corona solar durante um eclipse total do Sol em 21 de agosto de 2017 em Madras, Oregon. Crédito da figura: NASA/Aubrey Gemignani, Disponível em https://spaceplace.nasa.gov/sun-corona/en/.

sidade média de cerca de $10^{-4}T$. No entanto, nas manchas solares (que têm dimensões da ordem de 10^4 km) essa intensidade pode aumentar para alguns Teslas. É importante salientar, ainda, que o plasma Solar é confinado basicamente pelo intenso campo gravitacional produzido pela sua própria massa. Assim, para estudar o plasma Solar, é necessário incluir tanto as forças eletromagnéticas como gravitacionais.

Corona solar

A corona solar é a parte mais externa da atmosfera solar (acima de $10^4\,km$), que se estende por milhões de quilômetros pelo espaço e é mais facilmente visível apenas em eclipses totais do Sol, apresentando uma estrutura complexa de jatos e alças [Fig. 1.12]. As primeiras observações espectroscópicas da corona solar revelaram linhas de emissão que não correspondiam a nenhum elemento existente na Terra, o que levou à especulação que a corona pudesse ser constituída por um novo material (chamado "coronium"). Este mistério só foi resolvido em 1939 quando Grotrian mostrou que as linhas espectrais podiam ser explicadas supondo que os gases na corona eram superaquecidos, a temperaturas maiores que 10^6 Kelvin.

Nessa temperatura os átomos de Hidrogênio e Hélio estão completamente ionizados formando um plasma de baixa densidade, com os seguintes valores típicos

$$n_e \sim 10^{15}\,m^{-3}, \qquad k_B T_e \sim 100eV, \tag{1.128}$$

Com estes valores o comprimento de Debye é $\sim 10^{-3}m$, muito menor portanto do que as distâncias típicas, que são da ordem de $10^7 m$. O parâmetro de plasma eletrônico

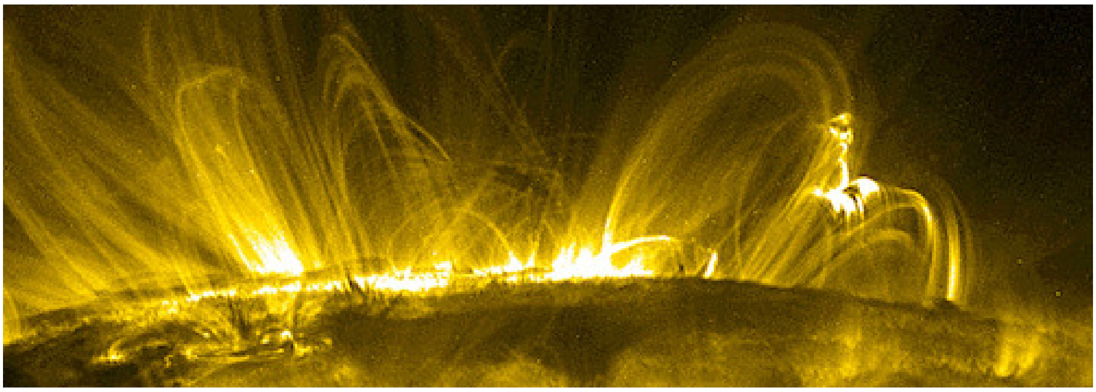

Figura 1.13: Alças coronais. Crédito da figura: NASA/TRACE. Disponível em https://spaceplace.nasa.gov/sun-corona/en/

correspondente é 5×10^4, um número suficientemente grande para a sua caracterização como plasma. Sendo o campo magnético é da ordem de $10^{-3}\,T$, a frequência de plasma eletrônica e o raio de Larmor correspondente são, respectivamente,

$$\omega_{ce} \sim 2 \times 10^8\, s^{-1}, \qquad r_e \sim 2 \times 10^{-2}\, m.$$

assim como a frequência colisional é $\sim 240 Hz$. A resistividade correspondente é da ordem de $8,5 \times 10^{-6}\, \Omega.m$.

As chamadas alças coronais são tubos de fluxo magnético que começam e terminam na fotosfera Solar, projetando-se em direção à corona. Como o plasma coronal é aprisionado nestas alças, elas são visíveis em imagens Solares [Fig. 1.13]. As extremidades das alças coronais estão ancoradas na fotosfera em regiões associadas às manchas solares. De fato, nas manchas solares o campo magnético Solar é mais intenso, trazendo plasma do interior do Sol para a sua superfície. Assim, o plasma nas regiões de intenso campo magnético é mais frio do que o plasma do restantes da fotosfera, o que explica a sua aparência de manchas escuras.

As regiões mais frias e rarefeitas da corona são chamadas buracos coronais, e são ancoradas apenas em uma extremidade na fotosfera. O campo magnético Solar nestes buracos tem a direção predominantemente radial, de modo que há uma ejeção de plasma que forma o chamado Vento Solar. Além desse fator, as próprias alças coronais podem se desprender e também ser ejetadas, compondo também o Vento Solar.

Devido à grande temperatura da Corona, aproximadamente a metade dos elétrons, e apenas 1% dos prótons, que compõem o plasma coronal tem velocidades térmicas que excedem a velocidade de escape gravitacional. Este desbalanço irá produzir um excesso de cargas positivas na corona que, por sua vez, causa o aparecimento de um intenso campo elétrico. Este campo acelera os prótons para fora da Corona, mantendo a neutralidade de carga do plasma [11].

A rotação do Sol faz com que o Vento Solar seja ejetado em espirais, preenchendo o meio interplanetário com um plasma bastante tênue, com densidade da ordem de 10^6 partículas por metro cúbico. A velocidade de propagação do Vento Solar é supersônica, com número de Mach entre 5 e 10. Em particular, nas proximidades da Terra a velocidade varia de 300 a 800 km/s. O vento Solar, nos períodos de intensa atividade do Sol, sofre perturbações significativas, aumentando tanto sua velocidade como sua temperatura, acompanhadas por flutuações grandes do campo magnético interplanetário

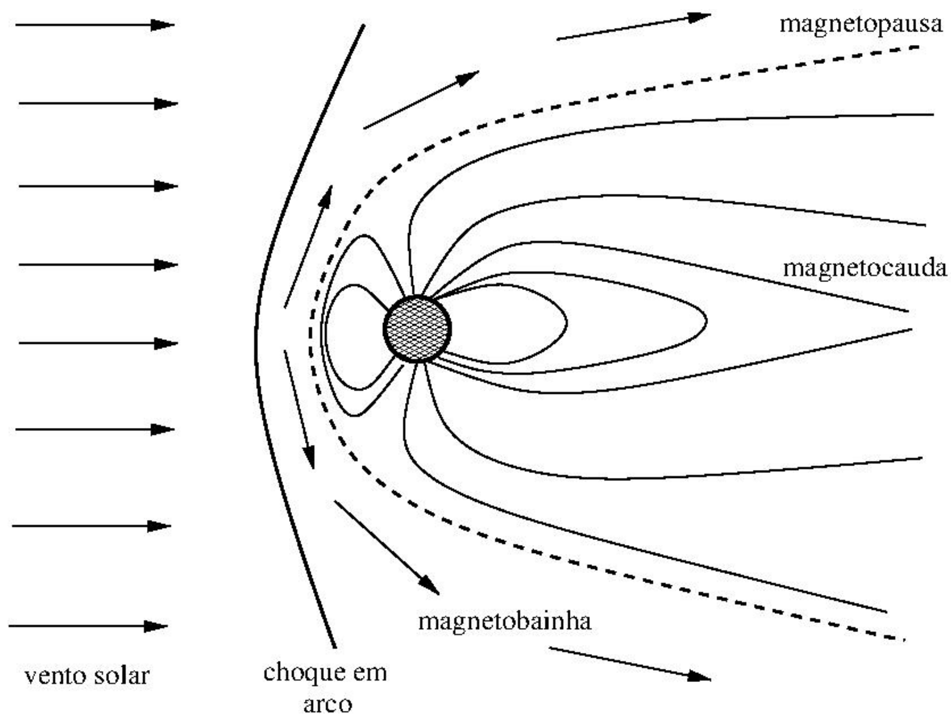

Figura 1.14: Figura esquemática da magnetosfera terrestre e sua interação com o vento solar.

[11].

Magnetosfera Terrestre

A região do espaço em torno da Terra na qual as partículas do vento solar são aprisionadas devido ao campo magnético é denominada magnetosfera. A estrutura da magnetosfera é ilustrada pela Figura 1.14 e tem os seguintes elementos: (a) o choque-em-arco ("bow shock") é a fronteira entre a magnetosfera e o espaço interplanetário, seguida pela magnetobainha; (b) a magnetopausa, na qual a pressão gerada pelo fluxo de partículas do vento solar é contrabalançada pela força magnética devido ao campo terrestre; (c) a magnetocauda, que é a extensão da magnetosfera no lado oposto do fluxo do vento solar [12].

Devido a efeitos de reconexão magnética, as partículas do vento solar passam através da magnetopausa e são confinadas pelo campo magnético dipolar, formando os chamados cinturões de Van Allen, descobertos em 1958 a partir dos dados fornecidos pelo satélite artificial Explorer 1.

São dois cinturões em forma de anéis concêntricos: (i) o anel interno estende-se de $1 \times 10^3\,km$ a $6 \times 10^3\,km$ de distância do centro da Terra, e constitui-se de prótons provenientes do decaimento de nêutrons do vento solar que colidem com átomos da atmosfera superior da Terra, com energias da ordem de $100 MeV$, bem como elétrons na faixa de centenas de keV; (ii) o anel externo está localizado entre $15 \times 10^3\,km$ e $25 \times 10^3\,km$ e contém partículas carregadas como elétrons altamente energéticos (de $0,1$ a $10 MeV$) e íons de Hélio [11]. Durante episódios de intensa atividade solar, muitas partículas escapam dos cinturões de Van Allen e, atingindo as camadas mais inferiores da atmosfera, ionizam os átomos e moléculas produzindo as auroras boreais e austrais.

Capítulo 2

As Equações da Magnetohidrodinâmica

A Magnetohidrodinâmica (MHD) combina as equações da mecânica dos fluidos com as equações de Maxwell do eletromagnetismo, bem como relações termodinâmicas. As equações hidrodinâmicas podem ser derivadas macroscopicamente [15, 16], mas também podem ser obtidas a partir da teoria cinética dos gases, tomando momentos apropriados da equação de Boltzmann. Será esse último enfoque que adotaremos em nossa discussão.

2.1 A equação de Boltzmann

Definimos, no Capítulo anterior, a função de distribuição de velocidades para um gás, o que pode ser generalizado para a chamada função de distribuição para a espécie s de um plasma, ou seja $f_s(\mathbf{r},\mathbf{c},t)$, onde $\mathbf{r} = (x_1,x_2,x_3) = (x,y,z)$ e $\mathbf{c} = (c_1,c_2,c_3) = (c_x,c_y,c_z)$. As espécies a serem consideradas são:

- $s = e$: elétrons livres, com carga $q_e = -e$;
- $s = i$: íons positivos, com $q_i = Ze$,

onde Z é o número atômico. Consideraremos, por simplicidade, apenas plasmas de hidrogênio, para os quais $Z = 1$.

Num espaço de fase hexa-dimensional, cujas coordenadas são as componentes da posição e da velocidade, o elemento de volume é

$$d\mu = d^3r\,d^3c = dx_1\,dx_2\,dx_3\,dc_1\,dc_2\,dc_3. \tag{2.1}$$

Interpretamos $f_s(\mathbf{r},\mathbf{c},t)\,d^3r\,d^3c$ como sendo a probabilidade de que uma partícula da espécie s esteja em uma posição dentro do elemento de volume d^3r centrado em $\mathbf{r}$ e com uma velocidade dentro do elemento de volume d^3c centrado em $\mathbf{c}$.

Se houver N_s partículas da espécie s num volume V, a densidade de número de partículas será $n_s = N_s/V$. O número de partículas no elemento de volume (2.1) será, pois,

$$N_s(t) = f_s(\mathbf{r},\mathbf{c},t)\,d\mu(t). \tag{2.2}$$

Não havendo colisões entre as partículas, o número delas num elemento de volume do espaço de fase será conservado:

$$N_s(t) = N_s(t+\Delta t), \tag{2.3}$$

já que não haverá transferência de momentum entre as partículas. Na presença de colisões, entretanto, haverá uma variação do número de partículas nesse elemento de volume

$$\Delta N_s(t) = N_s(t+\Delta t) - N_s(t). \tag{2.4}$$

Usando (2.2) teremos

$$\Delta N_s(t) = f_s(\mathbf{r}+\Delta\mathbf{r}, \mathbf{c}+\Delta\mathbf{c}, t+\Delta t)\, d\mu(t+\Delta t) - f_s(\mathbf{r}, \mathbf{c}, t)\, d\mu(t). \tag{2.5}$$

Para um intervalo de tempo suficientemente pequeno as variações na posição e na velocidade da partícula serão dadas, respectivamente, por

$$\Delta\mathbf{r} = \mathbf{c}\,\Delta t, \tag{2.6}$$

$$\Delta\mathbf{c} = \mathbf{a}\,\Delta t = \frac{\mathbf{F_s}}{m_s}\,\Delta t, \tag{2.7}$$

onde m_s é a massa das partículas, e $\mathbf{F_s}$ a força externa que nelas atua.

Expandindo (2.5) em séries de potências em Δt obtemos

$$f_s(\mathbf{r}+\Delta\mathbf{r}, \mathbf{c}+\Delta\mathbf{c}, t+\Delta t) = f_s(\mathbf{r}, \mathbf{c}, t) + \Delta t \frac{\partial f_s}{\partial t} + \Delta x_i \frac{\partial f_s}{\partial x_i} + \Delta c_i \frac{\partial f_s}{\partial c_i} + \ldots \tag{2.8}$$

a menos de termos de ordem quadrática ou superior. Além disso, usamos a convenção de soma: dois índices repetidos num mesmo termo estão implicitamente somados de 1 a 3. Por exemplo:

$$\Delta x_i \frac{\partial f_s}{\partial x_i} = \sum_{i=1}^{3} \Delta x_i \frac{\partial f_s}{\partial x_i} = \Delta\mathbf{r}\cdot\nabla f_s. \tag{2.9}$$

A expressão acima, após a substituição de (2.6) e (2.7), fica

$$\begin{aligned} f_s(\mathbf{r}+\Delta\mathbf{r}, \mathbf{c}+\Delta\mathbf{c}, t+\Delta t) &= f_s(\mathbf{r}, \mathbf{c}, t) + \\ \Delta t\,\frac{\partial f_s}{\partial t} + c_i \Delta t\,\frac{\partial f_s}{\partial x_i} &+ \frac{F_{si}}{m_s}\Delta t\,\frac{\partial f_s}{\partial c_i} + \ldots \end{aligned} \tag{2.10}$$

Os elementos de volume no espaço de fase, em tempos diferentes, estão relacionados pela expressão

$$d\mu(t+\Delta t) = |\mathcal{J}|\, d\mu(t), \tag{2.11}$$

onde $\mathcal{J}$ é o Jacobiano da transformação

$$\{x_1(t), x_2(t), \ldots c_3(t)\} \to \{x_1(t+\Delta t), x_2(t+\Delta t), \ldots c_3(t+\Delta t)\}.$$

Pode-se mostrar que $\mathcal{J} = 1$, a menos de termos de ordem mais alta [17], de modo que (2.4) fornece

$$\begin{aligned} \Delta N_s(t) &= [f_s(\mathbf{r}+\Delta\mathbf{r}, \mathbf{c}+\Delta\mathbf{c}, t+\Delta t) - f_s(\mathbf{r}, \mathbf{c}, t)]\, d\mu(t) \\ &= \left[\frac{\partial f_s}{\partial t} + c_i \frac{\partial f_s}{\partial x_i} + \frac{F_{si}}{m_s}\frac{\partial f_s}{\partial c_i}\right] \Delta t\, d\mu(t). \end{aligned} \tag{2.12}$$

Já o efeito das colisões entre as partículas, em vista de (2.5), pode ser modelado como

$$\frac{\Delta N_s}{\Delta t} = \left(\frac{\partial f_s}{\partial t}\right)_{col} d\mu(t), \tag{2.13}$$

onde $(\partial f_s/\partial t)_{col}$ é a parte colisional da variação da função de distribuição. Comparando (2.12) com (2.13) obtemos a equação de Boltzmann:

$$\frac{\partial f_s}{\partial t} + c_i \frac{\partial f_s}{\partial x_i} + \frac{F_{si}}{m_s} \frac{\partial f_s}{\partial c_i} = \left(\frac{\partial f_s}{\partial t} \right)_{col}, \tag{2.14}$$

que, numa notação vetorial, é escrita como

$$\frac{\partial f_s}{\partial t} + \mathbf{c} \cdot \nabla f_s + \frac{1}{m_s} \mathbf{F_s} \cdot \nabla_{\mathbf{c}} f_s = \left(\frac{\partial f_s}{\partial t} \right)_{coll}, \tag{2.15}$$

onde introduzimos o gradiente no espaço de velocidades:

$$\nabla_{\mathbf{c}} = \hat{\mathbf{c}}_1 \frac{\partial}{\partial c_1} + \hat{\mathbf{c}}_2 \frac{\partial}{\partial c_2} + \hat{\mathbf{c}}_3 \frac{\partial}{\partial c_3}. \tag{2.16}$$

Num plasma consideramos dois tipos de forças externas: eletromagnéticas e gravitacionais. Denotaremos por $\mathbf{E}(\mathbf{r},t)$, $\mathbf{B}(\mathbf{r},t)$ e $\mathbf{g}(\mathbf{r},t)$ os campos elétrico, magnético e gravitacional, respectivamente. A força externa sobre uma partícula de massa m_s e carga q_s é

$$\mathbf{F}_s = q_s(\mathbf{E} + \mathbf{c} \times \mathbf{B}) + m_s \mathbf{g}, \tag{2.17}$$

onde q_s é a carga elétrica.

Como a força gravitacional é conservativa, podemos escrevê-la como $\mathbf{g} = -\nabla\Phi$, onde Φ é o potencial gravitacional, de modo que

$$\mathbf{F}_s = q_s(\mathbf{E} + \mathbf{c} \times \mathbf{B}) - m_s \nabla\Phi, \tag{2.18}$$

ou, em componentes cartesianas,

$$F_{si} = q_s \left(E_i + \varepsilon_{\ell j i} c_\ell B_j \right) - m_s \frac{\partial \Phi}{\partial x_i}, \tag{2.19}$$

onde $\varepsilon_{\ell ji}$ é o símbolo de Levi-Civita (**??**) [vide Apêndice A].

Nós presumimos que **E**, **B** e Φ não dependam da velocidade das partículas, tal que

$$\frac{\partial F_{si}}{\partial c_i} = q_s \varepsilon_{iji} B_j = 0, \tag{2.20}$$

já que o símbolo de Levi-Civita anula-se para índices repetidos. Nessas condições a equação de Boltzmann (2.14) pode também ser expressa na forma

$$\frac{\partial f_s}{\partial t} + c_i \frac{\partial f_s}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial c_i} \left(\frac{F_{si}}{m_s} f_s \right) = \left(\frac{\partial f_s}{\partial t} \right)_{col}. \tag{2.21}$$

Substituindo (2.19) em (2.14) obtemos

$$\frac{\partial f_s}{\partial t} + c_i \frac{\partial f_s}{\partial x_i} + \left[\frac{q_s}{m_s} \left(E_i + \varepsilon_{\ell j i} c_\ell B_j \right) - \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \right] \frac{\partial f_s}{\partial c_i} = \left(\frac{\partial f_s}{\partial t} \right)_{col}, \tag{2.22}$$

que, na forma vetorial, fica

$$\frac{\partial f_s}{\partial t} + \mathbf{c} \cdot \nabla f_s + \left[\frac{q_s}{m_s} (\mathbf{E} + \mathbf{c} \times \mathbf{B}) - \nabla\Phi \right] \cdot \nabla_{\mathbf{c}} f_s = \left(\frac{\partial f_s}{\partial t} \right)_{col}. \tag{2.23}$$

2.2 Equação geral de transferência

As equações de fluidos necessárias à MHD são obtidas tomando momentos da equação de Boltzmann (2.14). Vamos considerar inicialmente os seguintes momentos da função de distribuição:

1. Densidade de número de partículas da espécie s:
$$n_s(\mathbf{r},t) = \int d^3c\, f_s, \tag{2.24}$$

2. Velocidade macroscópica da espécie s:
$$\mathbf{v}_s(\mathbf{r},t) = \frac{\int d^3c\,\mathbf{c} f_s}{\int d^3c\, f_s} = \frac{1}{n_s}\int d^3c\,\mathbf{c} f_s, \tag{2.25}$$

3. Valor médio de uma quantidade física $\chi(\mathbf{r},\mathbf{c},t)$ relativa à espécie s:
$$\langle\chi(\mathbf{r},t)\rangle = \frac{\int d^3c\chi f_s}{\int d^3c\, f_s} = \frac{1}{n_s}\int d^3c\chi f_s. \tag{2.26}$$

A velocidade macroscópica é, assim, a média das velocidades das partículas da espécie s:
$$\mathbf{v}_s = \langle\mathbf{c}\rangle. \tag{2.27}$$

Multiplicando a equação de Boltzmann (2.14) por χ e integrando no espaço das velocidades
$$\underbrace{\int d^3c\chi\frac{\partial f_s}{\partial t}}_{=I} + \underbrace{\int d^3c\chi c_i\frac{\partial f_s}{\partial x_i}}_{=II} + \underbrace{\int d^3c\frac{F_{si}}{m_s}\chi\frac{\partial f_s}{\partial c_i}}_{=III} = \int d^3c\chi\left(\frac{\partial f_s}{\partial t}\right)_{col}. \tag{2.28}$$

Calculando separadamente cada termo indicado acima, com o auxílio de (2.26), temos
$$I = \frac{\partial}{\partial t}\left(n_s\langle\chi\rangle\right) - n_s\left\langle\frac{\partial\chi}{\partial t}\right\rangle \tag{2.29}$$
$$II = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(n_s\langle c_i\chi\rangle\right) - n_s\left\langle\frac{\partial}{\partial x_i}(c_i\chi)\right\rangle \tag{2.30}$$

Para o termo III vamos inicialmente considerar apenas a direção c_1 no espaço das velocidades), para a qual
$$\left\langle\frac{\partial}{\partial c_1}\left(\frac{F_{s1}}{m_s}\chi\right)\right\rangle_1 = \frac{1}{n_s}\int_{-\infty}^{\infty} dc_1\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{F_{s1}}{m_s}\chi\right) f_s. \tag{2.31}$$

Integrando por partes
$$n_s\left\langle\frac{\partial}{\partial c_1}\left(\frac{F_{s1}}{m_s}\chi\right)\right\rangle = \underbrace{\frac{F_{s1}}{m_s}\chi f_s\Big|_{-\infty}^{\infty}}_{=0} - \int_{-\infty}^{+\infty} dc_1\frac{\partial f_s}{\partial c_1}\frac{F_{s1}}{m_s}\chi, \tag{2.32}$$

pois f_s anula-se quando $c_1 \to \pm\infty$. No caso tridimensional teremos [17]

$$-n_s \left\langle \frac{\partial}{\partial c_i}\left(\frac{F_{si}}{m_s}\chi\right)\right\rangle = \int d^3c \frac{\partial f_s}{\partial c_i}\frac{F_{si}}{m_s}\chi \tag{2.33}$$

de modo que

$$III = -\frac{n_s}{m_s}\left\langle \frac{\partial}{\partial c_i}(\chi F_{si})\right\rangle = -\frac{n_s}{m_s}\left\langle \frac{\partial \chi}{\partial c_i}F_{si}\right\rangle, \tag{2.34}$$

onde usamos (2.20), válida no caso de forças eletromagnéticas e gravitacionais.

Reunindo (2.29), (2.30) e (2.34) em (2.28) obtemos a chamada equação geral de transferência para a quantidade genérica $\chi(\mathbf{r},\mathbf{c},t)$:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}(n_s\langle\chi\rangle) - n_s\left\langle\frac{\partial\chi}{\partial t}\right\rangle + \frac{\partial}{\partial x_i}(n_s\langle\chi c_i\rangle) - \\ n_s\left\langle\frac{\partial}{\partial x_i}(c_i\chi)\right\rangle - \frac{n_s}{m_s}\left\langle\frac{\partial\chi}{\partial c_i}F_{si}\right\rangle = \int d^3c\,\chi\left(\frac{\partial f_s}{\partial t}\right)_{col}.\end{aligned} \tag{2.35}$$

2.3 Equação da continuidade

Fazendo $\chi = 1$ na equação geral de transferência (2.35) temos

$$\frac{\partial n_s}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i}(n_s\langle c_i\rangle) = \int d^3c\left(\frac{\partial f_s}{\partial t}\right)_{col}. \tag{2.36}$$

De (2.27) resulta que $v_{si} = \langle c_i\rangle$. Além disso, ignorando processos de ionização ou recombinação, as colisões não podem alterar o número total de partículas, de forma que

$$\int d^3c\left(\frac{\partial f_s}{\partial t}\right)_{col} = \left(\frac{\partial n_s}{\partial t}\right)_{col} = 0, \tag{2.37}$$

para cada espécie do plasma. Temos, portanto, a chamada equação de continuidade, que representa fisicamente o princípio de conservação de massa para cada espécie s:

$$\frac{\partial n_s}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i}(n_s v_{si}) = 0, \tag{2.38}$$

ou, em termos vetoriais,

$$\frac{\partial n_s}{\partial t} + \nabla\cdot(n_s\mathbf{v}_s) = 0. \tag{2.39}$$

2.4 A equação de movimento

Substituindo $\chi = m_s c_j$ (a j-ésima componente do momentum linear para a espécie s) na equação de transferência (2.35) temos

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial t}\left(n_s m_s\langle c_j\rangle\right)}_{=I} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_i}\left(m_s n_s\langle c_i c_j\rangle\right)}_{=II} - n_s\langle F_{sj}\rangle = \underbrace{\int d^3c\, m_s c_j\left(\frac{\partial f_s}{\partial t}\right)_{col}}_{=III}. \tag{2.40}$$

Decompomos a velocidade das partículas como uma parte média, dada por (2.27) como $v_{sj} = \langle c_j \rangle$, e que é a velocidade macroscópica do fluido, mais uma parte flutuante $\mathbf{w}$, também chamada velocidade peculiar:

$$\mathbf{c} = \mathbf{v}_s + \mathbf{w}. \tag{2.41}$$

A velocidade peculiar caracteriza-se por apresentar flutuações de caráter aleatório em torno de zero, tal que

$$\langle \mathbf{w} \rangle = 0. \tag{2.42}$$

O produto diádico $c_i c_j$ é a componente respectiva do produto tensorial entre os dois vetores: $c_i c_j = (\mathbf{cc})_{ij}$. Seu valor médio será

$$\begin{aligned} \langle c_i c_j \rangle &= \langle (v_{si} + w_i)(v_{sj} + w_j) \rangle \\ &= v_{si} v_{sj} + v_{si} \underbrace{\langle w_j \rangle}_{=0} + v_{sj} \underbrace{\langle w_i \rangle}_{=0} + \langle w_i w_j \rangle, \end{aligned}$$

já que a média da velocidade macroscópica é igual a ela própria. Vamos definir o tensor tensão para a espécie s como [14]

$$\mathsf{T}_s = m_s n_s \langle \mathbf{ww} \rangle, \tag{2.43}$$

ou, em componentes:

$$T_{sij} = m_s n_s \langle w_i w_j \rangle, \tag{2.44}$$

donde

$$\langle c_i c_j \rangle = v_{si} v_{sj} + \frac{1}{m_s n_s} T_{sij}. \tag{2.45}$$

Calculando cada termo de (2.40) em separado,

$$I = \frac{\partial}{\partial t} \left(m_s n_s v_{sj} \right), \tag{2.46}$$

$$II = \frac{\partial}{\partial x_i} \left[m_s n_s \left(v_{si} v_{sj} + \frac{1}{m_s n_s} T_{sij} \right) \right], \tag{2.47}$$

$$III = \int d^3c\, m_s (v_{sj} + w_j) \left(\frac{\partial f_s}{\partial t} \right)_{col} = m_s \int d^3c\, w_j \left(\frac{\partial f_s}{\partial t} \right)_{col}, \tag{2.48}$$

onde usamos (2.37). Substituindo (2.46)-(2.48) em (2.40)

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(m_s n_s v_{sj} \right) + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(m_s v_s v_{si} v_{sj} \right) + \frac{\partial T_{sij}}{\partial x_i} - n_s \langle F_{sj} \rangle = R_{sj} \tag{2.49}$$

onde definimos um novo termo colisional:

$$\mathbf{R}_s = \int d^3c\, m_s \mathbf{c} \left(\frac{\partial f_s}{\partial t} \right)_{col} = \int d^3c\, m_s \mathbf{w} \left(\frac{\partial f_s}{\partial t} \right)_{col}, \tag{2.50}$$

que representa o ganho líquido de momentum linear pelas partículas da espécie s devido às suas colisões com partículas de outras espécies (por exemplo, colisões elétron-íon ou íon-elétron). Por outro lado, colisões entre partículas de mesma espécie (como íon-íon ou elétron-elétron) não produzirão este ganho líquido de momentum.

Multiplicando a equação de continuidade (2.38) por $m_s v_{sj}$ obtemos

$$v_{sj}\frac{\partial}{\partial t}(m_s n_s) + v_{sj}\frac{\partial}{\partial x_i}(m_s n_s v_{si}) = 0, \tag{2.51}$$

que pode ser usada para reescrever (2.49) como

$$m_s n_s \left(\frac{\partial v_{sj}}{\partial t} + v_{si}\frac{\partial v_{sj}}{\partial x_i}\right) + \frac{\partial T_{sij}}{\partial x_i} - n_s\langle F_{sj}\rangle = R_{sj}. \tag{2.52}$$

A média da força externa dada por (2.18) será

$$\langle \mathbf{F_s}\rangle = q_s(\langle \mathbf{E}\rangle + \langle \mathbf{c}\rangle \times \langle \mathbf{B}\rangle) - m_s\nabla\langle\Phi\rangle = q_s(\mathbf{E} + \mathbf{v}_s \times \mathbf{B}) - m_s\nabla\Phi, \tag{2.53}$$

onde usamos o fato de nenhum dos campos externos serem dependentes da velocidade. Chegamos, assim, à equação de movimento para cada espécie s do plasma:

$$\begin{aligned} m_s n_s \left(\frac{\partial v_{sj}}{\partial t} + v_{si}\frac{\partial v_{sj}}{\partial x_i}\right) &= \\ -\frac{\partial T_{sij}}{\partial x_i} + n_s q_s \left(E_j + (\mathbf{v}_s \times \mathbf{B})_j\right) - m_s n_s \frac{\partial \Phi}{\partial x_j} + R_{sj}&, \end{aligned} \tag{2.54}$$

ou, em termos vetoriais, como

$$m_s n_s \left[\frac{\partial \mathbf{v}_s}{\partial t} + (\mathbf{v}_s \cdot \nabla)\mathbf{v}_s\right] = -\nabla \cdot \mathsf{T}_s + n_s q_s (\mathbf{E} + \mathbf{v}_s \times \mathbf{B}) - m_s n_s \nabla\Phi + \mathbf{R}_s. \tag{2.55}$$

Seja um campo vetorial genérico $\psi(\mathbf{r}, t)$. Sua derivada total em relação ao tempo para um fluido em movimento com velocidade $\mathbf{v}$ é

$$\frac{d}{dt}\psi(\mathbf{r}, t) = \frac{\partial\psi}{\partial x_i}\frac{dx_i}{dt} + \frac{\partial\psi}{\partial t} = \mathbf{v}\cdot\nabla\psi + \frac{\partial\psi}{\partial t}, \tag{2.56}$$

de modo que podemos encarar o símbolo d/dt como a derivada convectiva (ou material), que representa a variação de uma quantidade que move-se juntamente com o fluido durante seu fluxo:

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v}\cdot\nabla, \tag{2.57}$$

tal que a equação de movimento (2.55) é reescrita como

$$m_s n_s \frac{d\mathbf{v}_s}{dt} = -\nabla \cdot \mathsf{T}_s + n_s q_s (\mathbf{E} + \mathbf{v}_s \times \mathbf{B}) - m_s n_s \nabla\Phi + \mathbf{R}_s. \tag{2.58}$$

2.5 Caso isotrópico

Se as colisões elétron-íon e íon-elétron forem suficientemente frequentes a ponto de manter as funções de distribuição f_e e f_i aproximadamente Maxwellianas, o tensor tensão será isotrópico. Tensores isotrópicos são proporcionais ao tensor identidade I, cujas componentes são dadas pela delta de Krönecker δ_{ij}. No caso isotrópico o tensor tensão é escrito como

$$\mathsf{T}_s = p_s\mathsf{I}, \tag{2.59}$$

onde p_s é a pressão (escalar) associada à espécie s. Em componentes cartesianas

$$T_{sij} = p_s \delta_{ij}. \tag{2.60}$$

Multiplicando (2.60) por δ_{ij} e contraindo duplamente (isto é, somando em i e em j):

$$T_{sij}\delta_{ij} = p_s \delta_{ij}\delta_{ij} = p_s \delta_{ii} \tag{2.61}$$

onde $\mathrm{Tr}\mathsf{I} = \delta_{ii} = \delta_{11} + \delta_{22} + \delta_{33} = 3$. Logo

$$p_s = \frac{1}{3} T_{sii} = \frac{1}{3} \mathrm{Tr}\mathsf{T}_s, \tag{2.62}$$

de modo que a pressão é proporcional ao traço do tensor tensão. De (2.44) este último será dado por

$$T_{sii} = m_s n_s \langle w_{si} w_{si} \rangle, \tag{2.63}$$

tal que

$$p_s = \frac{1}{3} m_s n_s \langle w^2 \rangle. \tag{2.64}$$

A pressão da espécie s está relacionada à sua temperatura T_s pela equação dos gases ideais,

$$p_s = n_s k_B T_s, \tag{2.65}$$

onde k_B é a constante de Boltzmann.

O divergente do tensor tensão isotrópico (2.59) é

$$\nabla \cdot \mathsf{T}_s = \nabla \cdot (p_s \mathsf{I}) = \nabla p_s, \tag{2.66}$$

e a equação de movimento (2.55) pode ser expressa como:

$$m_s n_s \left[\frac{\partial \mathbf{v}_s}{\partial t} + (\mathbf{v}_s \cdot \nabla) \mathbf{v}_s \right] = -\nabla p_s + n_s q_s (\mathbf{E} + \mathbf{v}_s \times \mathbf{B}) - n_s m_s \nabla \Phi + \mathbf{R}_s. \tag{2.67}$$

2.6 Equação de conservação de energia

Substituindo a energia cinética das partículas da espécie s, $\psi = \frac{1}{2} m_s c^2$, na equação de transferência (2.35) temos

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} m_s n_s \langle c^2 \rangle \right)}_{=I} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{1}{2} m_s n_s \langle c^2 c_i \rangle \right)}_{=II} - \underbrace{n_s \left\langle \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial c_i} (m_s c^2) \frac{F_{si}}{m_s} \right\rangle}_{=III}$$
$$= \int d^3 c \, \frac{1}{2} m_s c^2 \left(\frac{\partial f_s}{\partial t} \right)_{col}. \tag{2.68}$$

Usando (2.64) obtemos, no caso isotrópico, as seguintes médias

$$\left\langle c^2 \right\rangle = v_s^2 + \frac{3 p_s}{m_s n_s}, \tag{2.69}$$

$$\langle c_i c^2 \rangle = v_{si} v_s^2 + 5 \frac{v_{si} p_s}{n_s m_s} + \langle w_i \mathbf{w}^2 \rangle, \tag{2.70}$$

e, com elas, calculamos cada termo em separado:

$$I = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}m_s n_s v_s^2 + \frac{3}{2}p_s\right) = \frac{\partial \varepsilon_s}{\partial t} \tag{2.71}$$

$$II = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{1}{2}m_s n_s v_s^2 v_{si} + \frac{5}{2}v_{si}p_s + q_{si}\right) = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\varepsilon_s v_{si} + v_{si}p_s + q_{si}\right)$$

$$III = n_s\langle c_i F_{si}\rangle = n_s q_s E_i v_{si} - n_s m_s v_{si}\frac{\partial \Phi}{\partial x_i}, \tag{2.72}$$

onde definimos a densidade de energia para a espécie s [14]

$$\varepsilon_s = \frac{1}{2}m_s n_s v_s^2 + \frac{3}{2}p_s, \tag{2.73}$$

e o vetor fluxo de calor para a espécie s como

$$\mathbf{q}_s = \int d^3c\,\frac{1}{2}m_s w^2 \mathbf{w} f_s = \frac{1}{2}m_s n_s\langle w^2\mathbf{w}\rangle. \tag{2.74}$$

Introduzimos, também, um novo termo colisional:

$$Q_s = \int d^3c\,\frac{1}{2}m_s w^2\left(\frac{\partial f_s}{\partial t}\right)_{col}, \tag{2.75}$$

de forma que

$$\int d^3c\,\frac{1}{2}m_s c^2\left(\frac{\partial f_s}{\partial t}\right)_{col} = v_{si}R_{si} + Q_s. \tag{2.76}$$

Substituindo (2.71)-(2.76) em (2.68) obtemos a equação de conservação de energia para a espécie s:

$$\frac{\partial \varepsilon_s}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i}\left[(\varepsilon_s + p_s)v_{si} + q_{si}\right] = n_s q_s E_i v_{si} - n_s m_s v_{si}\frac{\partial \Phi}{\partial x_i} + v_{si}R_{si} + Q_s, \tag{2.77}$$

ou, vetorialmente,

$$\frac{\partial \varepsilon_s}{\partial t} + \nabla\cdot\left[(\varepsilon_s + p_s)\mathbf{v}_s + \mathbf{q}_s\right] = n_s q_s \mathbf{v}_s\cdot\mathbf{E} - n_s m_s \mathbf{v}_s\cdot\nabla\Phi + \mathbf{v}_s\cdot\mathbf{R}_s + Q_s. \tag{2.78}$$

Podemos escrever a relação de conservação de energia numa forma alternativa que envolva apenas a pressão e a velocidade de cada espécie. Para tal multiplicamos escalarmente a equação de movimento (2.67) por $\mathbf{v}_s$:

$$m_s n_s\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v}_s\cdot\nabla\right)v_s^2 + \nabla p_s\cdot\mathbf{v}_s = n_s q_s\mathbf{E}\cdot\mathbf{v}_s - n_s m_s\nabla\Phi\cdot\mathbf{v}_s + \mathbf{R}_s\cdot\mathbf{v}_s. \tag{2.79}$$

Além disso, da equação de continuidade (2.39), temos que

$$\frac{1}{2}m_s v_s^2\left[\frac{\partial n_s}{\partial t} + \nabla\cdot(n_s\mathbf{v}_s)\right] = 0. \tag{2.80}$$

Substituindo (2.79) e (2.80) em (2.78) obtemos,

$$\frac{3}{2}\frac{\partial p_s}{\partial t} + \nabla\cdot\left(\frac{3}{2}p_s\mathbf{v}_s\right) + p_s(\nabla\cdot\mathbf{v}_s) + \nabla\cdot\mathbf{q}_s = Q_s. \tag{2.81}$$

2.7 Processos adiabáticos

A estratégia desenvolvida até agora baseia-se na obtenção de momentos da função de distribuição das partículas de cada espécie s. O momento de ordem zero representa a densidade de partículas e a equação de balanço correspondente (2.39) exprime a lei de conservação de massa. O momento de primeira ordem é a densidade de momentum linear, e a respectiva equação de balanço é a equação de movimento (2.55).

O segundo momento da função de distribuição é representado pelo tensor tensão (2.43) e a equação de balanço para a pressão, dada por (2.81), expressa a conservação de energia. Mas nessa equação introduzimos um terceiro momento, que é a densidade de fluxo de calor. Haveria, pois, a necessidade de obter uma equação de balanço para ele também. Isto gera um processo que continua indefinidamente, a menos que nós trunquemos a sequência de momentos da função de distribuição, fazendo suposições simplificadoras sobre a natureza do sistema físico.

Em nosso caso, vamos supor que não haja fluxos de calor ($\mathbf{q}_s = 0$) e que não haja produção líquida de energia devido às colisões ($Q_s = 0$). Neste caso a equação (2.81) torna-se

$$\frac{3}{2}\frac{\partial p_s}{\partial t} + \nabla \cdot \left(\frac{3}{2}p_s\mathbf{v}_s\right) + p_s(\nabla \cdot \mathbf{v}_s) = 0, \tag{2.82}$$

que, após rearranjos, é reescrita como

$$\frac{3}{2}\frac{dp_s}{dt} + \frac{5}{2}p_s(\nabla \cdot \mathbf{v}_s) = 0, \tag{2.83}$$

onde usamos a derivada material (2.57). Podemos eliminar o divergente da velocidade usando a equação de continuidade (2.39), obtendo

$$\frac{3}{2}\frac{dp_s}{dt} - \frac{5}{2}\frac{p_s}{n_s}\frac{dn_s}{dt} = 0, \tag{2.84}$$

que pode ser integrada de forma elementar, resultando em (p_0 e n_0 são constantes de integração)

$$\frac{p_s}{p_0} = \left(\frac{n_s}{n_0}\right)^{5/3}, \tag{2.85}$$

que é a relação termodinâmica para processos adiabáticos de um gás ideal:

$$p_s n_s^{-5/3} = const. \tag{2.86}$$

Usando a derivada material (2.57), podemos reescrevr (2.86) na forma

$$\frac{d}{dt}\left(p_s n_s^{\gamma}\right) = 0, \tag{2.87}$$

onde

$$\gamma = \frac{5}{3}. \tag{2.88}$$

Em processos adiabáticos, nós identificamos o expoente (2.88) com a razão entre os calores específicos a pressão é volume constantes:

$$\gamma = \frac{c_p}{c_v} = \frac{D+2}{D}, \tag{2.89}$$

onde D é o número de graus de liberdade envolvidos. No caso de $D = 3$ temos que $\gamma = 5/3$, de fato. Finalmente, supomos que cada espécie satisfaça à equação de estado de um gás ideal

$$p_s = n_s k_B T_s, \tag{2.90}$$

onde T_s é a temperatura associada à espécie s.

2.8 Equações da teoria de dois fluidos

As equações da teoria colisional de dois fluidos (onde $s = e$ indica os elétrons e $s = i$ os íons positivos de hidrogênio) são as seguintes:

1. Equações de continuidade (conservação de massa): vide (2.39)

$$\frac{\partial n_e}{\partial t} + \nabla \cdot (n_e \mathbf{v}_e) = 0, \tag{2.91}$$

$$\frac{\partial n_i}{\partial t} + \nabla \cdot (n_i \mathbf{v}_i) = 0; \tag{2.92}$$

2. Equações de movimento (conservação de momentum linear): são dadas, no caso isotrópico, por (2.58)

$$m_e n_e \left[\frac{\partial \mathbf{v}_e}{\partial t} + (\mathbf{v}_e \cdot \nabla) \mathbf{v}_e \right] = -\nabla p_e - e n_e (\mathbf{E} + \mathbf{v}_e \times \mathbf{B}) - n_e m_e \nabla \Phi + \mathbf{R}_e, \tag{2.93}$$

$$m_i n_i \left[\frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial t} + (\mathbf{v}_i \cdot \nabla) \mathbf{v}_i \right] = -\nabla p_i + e n_i (\mathbf{E} + \mathbf{v}_i \times \mathbf{B}) - n_i m_i \nabla \Phi + \mathbf{R}_i; \tag{2.94}$$

3. Equações de energia (processos adiabáticos)

$$\frac{d}{dt} \left(p_e n_e^{-\gamma} \right) = 0, \tag{2.95}$$

$$\frac{d}{dt} \left(p_i n_i^{-\gamma} \right) = 0. \tag{2.96}$$

2.9 Teoria de um fluido

Na magnetohidrodinâmica nós consideramos o plasma como um único fluido resultante da mistura dos fluidos eletrônico e iônico. Para escrever as equações da teoria de um fluido, definimos as seguintes quantidades

- Densidade de massa

$$\rho(\mathbf{r}, t) = \sum_s m_s n_s = n_i m_i + n_e m_e, \tag{2.97}$$

- Velocidade média do fluido

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{\rho} \sum_s n_s m_s \mathbf{v}_s = \frac{n_i m_i \mathbf{v}_i + n_e m_e \mathbf{v}_e}{n_i m_i + n_e m_e}, \tag{2.98}$$

- Densidade de carga elétrica

$$\rho_c(\mathbf{r},t) = \sum_s n_s q_s = e(n_i - n_e), \tag{2.99}$$

- Densidade de corrente elétrica

$$\mathbf{J}(\mathbf{r},t) = \sum_s n_s q_s \mathbf{v}_s = e(n_i \mathbf{v}_i - n_e \mathbf{v}_e). \tag{2.100}$$

2.9.1 Equações de continuidade

Multiplicando (2.91) por m_e, (2.92) por m_i e somando membro a membro temos

$$\frac{\partial}{\partial t}(m_i n_i + m_e n_e) + \nabla \cdot (m_i n_i \mathbf{v}_i + m_e n_e \mathbf{v}_e) = 0$$

de forma que, usando (2.97) e (2.98) chegamos à equação de continuidade de massa

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0. \tag{2.101}$$

De forma similar, multiplicando (2.91) por q_e, (2.92) por q_i e somando membro a membro,

$$\frac{\partial}{\partial t}(q_i n_i + q_e n_e) + \nabla \cdot (q_i n_i \mathbf{v}_i + q_e n_e \mathbf{v}_e) = 0,$$

que, usando (2.99), (2.100) e (2.98), leva-nos à equação de continuidade de carga

$$\frac{\partial \rho_c}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J} = 0. \tag{2.102}$$

2.9.2 Hipóteses simplificadoras

A passagem da teoria de dois fluidos para a teoria de um fluido não é inteiramente trivial, pois ela envolve o uso judicioso de uma série de hipóteses simplificadoras sobre as espécies envolvidas (elétrons e íons positivos) bem como sobre as escalas características de comprimento e tempo envolvidas.

Quase-neutralidade

No Capítulo 1 abordamos o fenômeno da blindagem de Debye sofrido por uma carga dentro de um plasma: ela é envolvida por uma "nuvem" de cargas cujo raio é igual ao comprimento de Debye para uma dada espécie. Para distâncias maiores do que um comprimento de Debye temos idealmente uma neutralidade das cargas, ou seja, as densidades de carga de elétrons e íons são iguais: $|q_e| n_e = q_i n_i$, ou seja, $n_e = n_i$. Para um plasma, este comprimento de Debye é muito menor do que um comprimento característico do sistema, de forma que essa propriedade vale para todo o sistema. No entanto, a neutralidade não é realmente total, pois as cargas envolvidas estão em movimento, de modo que o mais correto é falar em quase-neutralidade, ou seja

$$n_e \approx n_i. \tag{2.103}$$

Uma consequência imediata da quase-neutralidade é que a densidade de carga elétrica (2.99) é aproximadamente nula: $\rho_c \approx 0$. A equação de continuidade de carga (2.102) reduz-se, pois, à condição

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = 0. \tag{2.104}$$

A própria densidade de corrente elétrica (2.100) pode ser expressa, de forma aproximada, como:

$$\mathbf{J} \approx e n_i (\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_e) \approx -e n_e (\mathbf{v}_e - \mathbf{v}_i). \tag{2.105}$$

Relação entre as massas

A razão entre as massas de elétrons e íons positivos é muito pequena, a saber [cf. 1.47]:

$$\frac{m_i}{m_e} = \frac{m_p}{m_e} \approx 1840 \ll 1 \tag{2.106}$$

Portanto, podemos frequentemente desprezar a razão m_i/m_e quando consideramos quantidades da teoria de um fluido. Por exemplo, a densidade de massa (2.97) é escrita

$$\rho = n_i m_i \left(1 + \frac{n_e}{n_i}\frac{m_e}{m_i}\right) \approx n_i m_i \left(1 + \frac{m_e}{m_i}\right), \tag{2.107}$$

onde usamos a quaseneutralidade. Eventualmente a própria razão m_e/m_i é desprezível frente aos outros termos envolvidos, de modo que $\rho \approx n_i m_i$ será aceitável.

A velocidade média do fluido (2.98) é

$$\mathbf{v} = \frac{n_i m_i}{\rho}\left(\mathbf{v}_i + \frac{m_e}{m_i}\mathbf{v}_e\right) = \left(1 + \frac{m_e}{m_i}\right)^{-1}\left(\mathbf{v}_i + \frac{m_e}{m_i}\mathbf{v}_e\right) \approx \mathbf{v}_i + \frac{m_e}{m_i}(\mathbf{v}_e - \mathbf{v}_i), \tag{2.108}$$

2.9.3 Força de arrasto colisional

Na teoria de dois fluidos estamos mais interessados nas colisões entre elétrons e íons, com frequência colisional $\nu_c = \nu_{ei}$ dada por (1.106). No Capítulo I vimos que tais colisões provocam macroscopicamente uma força de arrasto sobre os elétrons dada por (1.114), a qual é proporcional tanto à frequência colisional como ao momentum linear.

A densidade de momentum linear dos elétrons num referencial em que os íons estão em repouso é $m_e n_e \mathbf{v}_e$. Como os íons se movem com velocidade $\mathbf{v}_i$, o momentum linear dos elétrons no referencial do laboratório é dado pela velocidade relativa $\mathbf{v}_e - \mathbf{v}_i$, de modo que a força de arrasto friccional é o produto da frequência colisional pela densidade de momentum linear

$$\mathbf{R}_e = -m_e n_e \nu_{ei} (\mathbf{v}_e - \mathbf{v}_i). \tag{2.109}$$

Para íons teremos uma expressão análoga

$$\mathbf{R}_i = -m_i n_i \nu_{ie} (\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_e). \tag{2.110}$$

onde ν_{ie} é a frequência colisional entre íons e elétrons dada por (1.111), a saber:

$$\nu_{ie} \approx \frac{m_e}{m_i}\nu_{ei}, \tag{2.111}$$

Como $m_e \ll m_i$, a frequência ν_{ie} é muito menor que ν_{ei}. Substituindo (2.111) em (2.110) teremos

$$\mathbf{R}_i \approx -m_e n_i \nu_{ei}(\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_e). \tag{2.112}$$

Mas, num plasma quase-neutro, $n_i \approx n_e$. Logo, de (2.109), resulta que

$$\mathbf{R}_i \approx -\mathbf{R}_e. \tag{2.113}$$

Portanto, o ganho líquido de momentum linear de uma espécie é contrabalançado pela perda líquida de momentum da outra espécie, de modo que o momentum linear global do sistema seja conservado.

2.9.4 Equação do movimento

Somando as equações de movimento (2.93) e (2.94) para elétrons e íons,

$$\begin{aligned} m_e n_e \frac{\partial \mathbf{v}_e}{\partial t} + m_e n_e (\mathbf{v}_e \cdot \nabla)\mathbf{v}_e + m_i n_i \frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial t} + m_i n_i (\mathbf{v}_i \cdot \nabla)\mathbf{v}_i = -\nabla(p_e + p_i) \\ -e\underbrace{(n_e - n_i)}_{\approx 0}\mathbf{E} + \underbrace{e(n_i\mathbf{v}_i - n_e\mathbf{v}_e)}_{=\mathbf{J}} \times \mathbf{B} - (n_e m_e + n_i m_i)\nabla\Phi + \underbrace{\mathbf{R}_e + \mathbf{R}_i}_{\approx 0}, \end{aligned} \tag{2.114}$$

onde usamos (2.100), (2.103) e (2.113).

Usando as aproximações (2.107) e (2.108) podemos escrever, desprezando termos pequenos na razão das massas, que

$$\rho\left[\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{v}\right] \approx m_e n_e \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v}_e \cdot \nabla\right)\mathbf{v}_e + m_i n_i \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v}_i \cdot \nabla\right)\mathbf{v}_i. \tag{2.115}$$

Como a pressão da mistura é a soma das pressões parciais dos constituintes

$$p = \sum_s p_s = p_i + p_e, \tag{2.116}$$

resulta que, substituindo (2.115) em (2.114) obtemos a equação de movimento do fluido:

$$\rho\left[\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{v}\right] = -\nabla p + \mathbf{J}\times\mathbf{B} - \rho\nabla\Phi, \tag{2.117}$$

que pode ser reescrita, em termos do tensor tensão da mistura

$$\mathsf{T} = \sum_s \mathsf{T}_s = \mathsf{T}_e + \mathsf{T}_i, \tag{2.118}$$

numa forma um pouco mais geral, que é

$$\rho\left[\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{v}\right] = -\nabla\cdot\mathsf{T} + \mathbf{J}\times\mathbf{B} - \rho\nabla\Phi. \tag{2.119}$$

2.9.5 Equação de energia

Somando (2.95) e (2.96)

$$\frac{d}{dt}\left(p_i n_i^{-\gamma} + p_e n_e^{-\gamma}\right) \approx \frac{d}{dt}\left[(p_e + p_i)n_i^{-\gamma}\right] = 0, \tag{2.120}$$

onde usamos a hipótese de quase-neutralidade. Usando (2.116) e a aproximação $\rho \approx n_i m_i$ para a densidade obtemos uma equação de energia para o fluido

$$\frac{d}{dt}\left(p\rho^{-\gamma}\right) = 0. \tag{2.121}$$

Usando a derivada convectiva (2.57) e a equação de continuidade (2.101) podemos eliminar a densidade em (2.121) em favor da velocidade do fluido:

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \mathbf{v}\cdot\nabla p + \gamma p\,(\nabla\cdot\mathbf{v}) = 0. \tag{2.122}$$

Somando e subtraindo o termo $p(\nabla\cdot\mathbf{v} = 0)$ obtemos

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \nabla\cdot(p\,\mathbf{v}) = -(\gamma - 1)p\,(\nabla\cdot\mathbf{v}). \tag{2.123}$$

Esta equação pode descrever alguns processos termodinâmicos de interesse, que veremos em detalhes a seguir.

Processos isotérmicos

Somando (2.90) para as duas espécies e definindo a temperatura da mistura como

$$T = T_e + T_i, \tag{2.124}$$

chegamos à equação dos gases ideais para um fluido

$$p = n_i k_B T = \frac{\rho k_B T}{m_i}. \tag{2.125}$$

Derivando a expressão acima em relação ao tempo e usando (2.101) obtemos

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -\left[\rho(\nabla\cdot\mathbf{v}) + \mathbf{v}\cdot\nabla\rho\right]\frac{k_B T}{m_i} + \frac{\rho k_B}{m_i}\frac{\partial T}{\partial t}. \tag{2.126}$$

Fazendo o mesmo com $\nabla\cdot(p\mathbf{v})$ e substituindo em (2.123) chegamos a uma equação envolvendo a temperatura

$$\frac{dT}{dt} = -(\gamma - 1)T\,(\nabla\cdot\mathbf{v}), \tag{2.127}$$

onde usamos a derivada convectiva (2.57).

Num processo isotérmico a temperatura é constante, donde $dT/dt = 0$, o que nos conduz a $\gamma = 1$.

Processos isovolumétricos

Nestes o volume do fluido é constante de maneira que, sendo sua massa também constante, assim o será a densidade de massa: $\partial\rho/\partial t = 0$ e $\nabla\rho = 0$. Da equação de continuidade (2.101)

$$0 = -\nabla\cdot(\rho\mathbf{v}) = -\rho\nabla\cdot\mathbf{v},$$

donde obtemos a condição de incompressibilidade

$$\nabla\cdot\mathbf{v} = 0. \tag{2.128}$$

Da equação (2.127) podemos isolar o divergente da velocidade:

$$\nabla\cdot\mathbf{v} = \frac{1}{1-\gamma}\frac{d\ln T}{dt}.$$

Assim, a condição (2.128) para processos isovolumétricos equivale a fazer $\gamma\to\infty$.

Processos adiabáticos

A equação dos gases ideais (2.65) fornece, para um mol de partículas, a relação

$$pV = \mathcal{R}T, \tag{2.129}$$

onde definimos a constante dos gases

$$\mathcal{R} = \frac{k_B}{N_A} = 8,314\, J/mol.K \tag{2.130}$$

e $N_A = 6,022\times 10^{23}\,\mathrm{mol}^{-1}$ é o número de Avogadro.

Da termodinâmica de equilíbrio, sabemos que a variação infinitesimal da entropia num processo reversível é [18]

$$dS = T\,(c_v V dp + c_p p dV) \tag{2.131}$$

onde c_v e c_p são os calores específicos a volume e pressão constantes, respectivamente. Usando (2.89) e (2.129) esta variação pode ser escrita como

$$dS = c_v\mathcal{R}\left(\frac{dp}{p} + \gamma\frac{dV}{V}\right). \tag{2.132}$$

Integrando esta expressão, a variação de entropia num processo termodinâmico será

$$S = S_0 + c_v\mathcal{R}\ln(pV^\gamma), \tag{2.133}$$

onde S_0 é uma constante. Num processo adiabático reversível a entropia é constante, donde

$$pV^\gamma = const., \tag{2.134}$$

que, em vista de $\rho\approx m_i n_i$, reduz-se a (2.121), com $\gamma = 5/3$, como esperado.

2.9.6 Lei de Ohm generalizada

Usando (2.108) a densidade de corrente (2.105) pode ser usada para eliminar a velocidade dos elétrons em

$$\mathbf{v}_e \approx \mathbf{v} - \frac{1}{en_e}\mathbf{J}. \tag{2.135}$$

de modo que o termo $(\mathbf{v}_e \cdot \nabla)\mathbf{v}_e$ poderá ser desprezado por ser muito pequeno face a outros termos na equação de movimento dos elétrons. Substituindo (2.135) em (2.93) teremos, após dividir por $-en_e$, que

$$-\frac{m_e}{e}\left[\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} - \frac{1}{en_e}\frac{\partial \mathbf{J}}{\partial t} + \underline{\frac{\mathbf{J}}{n_e^2}\frac{\partial n_e}{\partial t}}\right] =$$

$$\frac{1}{en_e}\nabla p_e + \mathbf{E} + \left(\mathbf{v} - \frac{1}{en_e}\mathbf{J}\right) \times \mathbf{B} + \frac{n_e}{e}\nabla\Phi - \frac{1}{en_e}\mathbf{R}_e. \tag{2.136}$$

Desprezamos o termo sublinhado na expressão acima, pois ele depende de $1/n_e^2$, restando os seguintes termos:

$$\mathbf{E} + \left(\mathbf{v} - \frac{1}{en_e}\mathbf{J}\right) \times \mathbf{B} + \frac{1}{en_e}\nabla p_e + \frac{n_e}{e}\nabla\Phi - \frac{1}{en_e}\mathbf{R}_e = \frac{m_e}{e^2 n_e}\frac{\partial \mathbf{J}}{\partial t} - \frac{m_e}{e}\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \tag{2.137}$$

Usando (1.119) a resistividade do plasma é dada em termos da frequência colisional por

$$\eta = \frac{m_e \nu_{ei}}{n_e e^2}. \tag{2.138}$$

Além disso, empregando (2.109) para a força colisional sobre os elétrons, temos

$$\mathbf{R}_e = -n_e^2 \eta e^2 (\mathbf{v}_e - \mathbf{v}_i) = en_e \eta \mathbf{J} \tag{2.139}$$

onde usamos (2.105). Substituindo em (3.51) temos uma primeira versão da chamada lei de Ohm generalizada:

$$\mathbf{E} + \left(\mathbf{v} - \frac{1}{en_e}\mathbf{J}\right) \times \mathbf{B} + \frac{1}{en_e}\nabla p_e + \frac{n_e}{e}\nabla\Phi - \eta\mathbf{J} = \frac{m_e}{e^2 n_e}\frac{\partial \mathbf{J}}{\partial t} - \frac{m_e}{e}\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}. \tag{2.140}$$

2.10 Equações da Magnetohidrodinâmica

As equações da magnetohidrodinâmica são obtidas a partir da teoria de um fluido (com as hipóteses simplificadoras), combinadas às equações de Maxwell [20]:

- Lei de Gauss elétrica
$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho_c}{\varepsilon_0}, \tag{2.141}$$

- Lei de Gauss magnética
$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \tag{2.142}$$

- Lei de Faraday
$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \tag{2.143}$$

- Lei de Ampère-Maxwell

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}. \tag{2.144}$$

As leis de Gauss magnética e de Faraday não sofrem alteração no contexto da MHD, mas as leis de Gauss elétrica e de Ampère-Maxwell assumirão formas simplificadas.

2.10.1 Hipóteses da MHD

A Magnetohidrodinâmica é uma teoria de um fluido, sob a qual determinadas hipóteses simplificadoras devem ser satisfeitas. Inicialmente a própria hipótese da descrição do plasma como um fluido deve ser analisada com cuidado. Para que possamos fazê-lo é necessário que as partículas do plasma permaneçam próximas umas às outras na escala de tempo de interesse [**?**]. Assim é possível considerar elementos de fluido pequenos o suficiente para permitir o uso das equações hidrodinâmicas, porém grandes o suficiente para conter um número significativo de partículas. Isto significa que deve haver colisões suficientemente frequentes entre as partículas, ou seja, que as frequências colisionais sejam muito maiores do que as frequências de interesse.

Para determinar a escala de tempo característica t da MHD consideramos um comprimento característico L e tomamos como a velocidade característica a velocidade térmica, por exemplo, dos íons, de modo que

$$t \sim \frac{L}{c_{Ti}}, \tag{2.145}$$

é a escala de tempo mais rápida na qual pode ocorrer um movimento macroscópico do plasma. A frequência característica será, assim

$$\omega \sim \frac{1}{t} \sim c_{Ti} L. \tag{2.146}$$

Outros fenômenos, como a propagação de ondas, por exemplo, também podem ter sua frequência característica.

Durante a escala de tempo característica haverá um número suficientemente grande de colisões entre as espécies de partículas que compõe o plasma: colisões íon-íon, com frequência ν_{ii} e colisões elétron-elétron, com frequência ν_{ee}. As condições para que cada espécie tenham dominância colisional serão, portanto

$$\omega \ll \nu_{ii}, \qquad \omega \ll \nu_{ee} \tag{2.147}$$

No capítulo 1 vimos que tais frequências colisionais satisfazem às relações

$$\nu_{ie} =\approx \frac{m_e}{m_i}\nu_{ei}, \qquad \nu_{ee} \sim \nu_{ei}, \qquad \nu_{ii} \approx \sqrt{\frac{m_e}{m_i}}\nu_{ee}, \tag{2.148}$$

onde a frequência colisional íon-elétron é dada por (1.106). Por outro lado, de (1.107) temos que $\nu_{ei} \ll \omega_{pe}$ para um plasma (tal que $\Lambda_e \gg 1$). Assim, a condição (2.147) também aplicam-se à frequência de plasma eletrônica: $\omega \ll \omega_{pe}$.

Além disso, a magnetohidrodinâmica também tem suas condições de aplicabilidade relacionadas às escalas de tempo e comprimento impostas pela existência de campos eletromagnéticos sobre os plasmas. Os fenômenos a serem estudados pela MHD apresentam escalas de tempo tipicamente grandes, ou seja, baixas frequências. O termo “baixas”, aqui, pode ser tornado quantitativamente preciso especificando duas condições:

- se o fenômeno estudado (perturbação ou onda) tiver um número de onda $k \sim 2\pi/L$, onde L é um comprimento característico, então a frequência característica satisfará a relação
$$\omega \ll kc, \tag{2.149}$$
onde $c = \sqrt{1/\varepsilon_0\mu_0}$ é a velocidade das ondas eletromagnéticas no vácuo;

- se B é o campo magnético típico do plasma, as frequências envolvidas devem ser muito menores que a frequência ciclotrônica para ambas as espécies de partículas
$$\omega \ll \omega_{cs} = \frac{|q_s|B}{m_s}; \tag{2.150}$$

- o comprimento característico do fenômeno L deve ser muito maior do que o raio de Larmor das partículas (onde c_{Ts} é a velocidade térmica)
$$L \gg r_s = \frac{c_{Ts}}{\omega_{cs}}. \tag{2.151}$$

Para plasmas de fusão, vimos que a frequência colisional elétron-íon é $\nu_{ei} \sim 30s^{-1}$. Como
$$\sqrt{\frac{m_e}{m_i}} \approx \sqrt{\frac{1}{1840}} \approx \frac{1}{43} = 0,0233,$$
então de (2.152)
$$\nu_{ee} \sim 30s^{-1}, \qquad \nu_{ii} \approx 0,7s^{-1}. \tag{2.152}$$
Supondo $L \sim 1m$ e usando que $c_{Ti} \sim 10^5 m/s$ temos que a frequência característica na MHD será da ordem de $10^5 s^{-1}$. Vemos que a condição (2.147) não é satisfeita. Que isso quer dizer?

A rigor, a descrição de fluido não é sempre apropriada para plasmas de fusão. De fato, uma situação bastante comum (e desenvolvida em detalhes neste livro) é o equilíbrio, onde a frequência característica é zero, de modo que a teoria de um fluido resulta aplicável nesse caso. Já para fenômenos onde há propagação de ondas, no entanto, a escala de tempo é diferente, o que traz novamente o problema da aplicabilidade da teoria MHD.

A resposta a este aparente paradoxo reside na existência, em plasmas de fusão, de campos magnéticos muito intensos. Devido ao raio de Larmor relativamente pequeno das partículas do plasma, existe aqui um efeito de proximidade das partículas semelhante ao fornecido pela alta frequência colisional. Sob um certo ponto de vista, é como se o campo magnético compensasse a baixa colisionalidade característica dos plasmas de fusão [2]. No entanto, esta descrição a rigor só é válida em direções perpendiculares ao campo magnético, onde o raio de Larmor efetivamente limita o movimento das partículas. Ao longo da direção do campo não existe essa limitação, e a MHD pode não ser necessariamente aplicável.

Campos elétricos no plasma

A condição de quase-neutralidade do plasma implica que a densidade de carga é praticamente nula, ou $\rho_c \approx 0$. Como enfatizado por Freidberg [19] isto não implica, porém, que a Lei de Gauss elétrica (2.141) resulta em $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$ nem em $\mathbf{E} = \mathbf{0}$. A rigor, teremos
$$\frac{\varepsilon_0 \nabla \cdot \mathbf{E}}{en_e} \ll 1, \tag{2.153}$$

já que para qualquer perturbação de baixa frequência que provoque uma separação de carga os elétrons terão tempo mais do que suficiente para responder, criando um campo elétrico que manterá o plasma na condição de quase-neutralidade. Isto significa que a condição de quase-neutralidade é compatível com um campo elétrico $\mathbf{E}$ não-nulo no plasma.

Ausência da corrente de deslocamento

O termo

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

na lei de Ampère-Maxwell (2.144) é a densidade de corrente de deslocamento. Vamos mostrar que, sob as hipóteses adicionais da MHD, ela é desprezível frente à densidade de corrente de condução $\mathbf{J}$. Para isto, substituimos (2.143) em (2.144) para escrever

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = \mu_0 \frac{\partial \mathbf{J}}{\partial t} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}, \tag{2.154}$$

o que, sabemos, levará a uma equação de onda para o campo elétrico.

Seja, pois, uma onda plana com vetor de onda $\mathbf{k}$ e frequência ω:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)}, \tag{2.155}$$

para a qual valem as associações

$$\frac{\partial}{\partial t} \to -i\omega, \qquad \nabla \to i\mathbf{k}. \tag{2.156}$$

Usando-as em (2.154) estimamos a magnitude dos seus termos

$$|\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E})| \sim k^2 |\mathbf{E}|, \qquad \frac{1}{c^2}\left|\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}\right| \sim \frac{\omega^2}{c^2}|\mathbf{E}|. \tag{2.157}$$

Da condição (2.149) temos que

$$\frac{1}{c^2}\left|\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}\right| \ll |\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E})| \tag{2.158}$$

de modo que a corrente de deslocamento é desprezível, e a lei de Ampère-Maxwell (2.144) ficará simplesmente

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}. \tag{2.159}$$

2.10.2 Lei de Ohm generalizada

As hipóteses simplificadoras desta seção podem ser usadas para eliminar alguns termos na lei de Ohm generalizada (5.35):

$$\mathbf{E} + \underbrace{\mathbf{v} \times \mathbf{B}}_{=I} - \underbrace{\frac{1}{en_e}\mathbf{J} \times \mathbf{B}}_{=II} - \underbrace{\frac{1}{en_e}\nabla p_e}_{=III} + \underbrace{\frac{m_e}{e}\nabla\Phi}_{=IV} - \eta\mathbf{J} = \underbrace{\frac{m_e}{e^2 n_e}\frac{\partial \mathbf{J}}{\partial t}}_{=V} - \underbrace{\frac{m_e}{e}\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}}_{=VI} \tag{2.160}$$

onde o termo II é conhecido como "termo de Hall", ao passo que o termo III representa o efeito da deriva diamagnética eletrônica [14].

Para comparar as ordens de grandeza dos diversos termos da expressão acima, vamos considerar as seguintes razões:

$$\frac{|V|}{|II|} = \frac{m_e}{e}\frac{\left|\frac{\partial \mathbf{J}}{\partial t}\right|}{|\mathbf{J}\times\mathbf{B}|} \sim \frac{m_e}{e}\frac{\omega}{B} = \frac{\omega}{\omega_{ce}} \ll 1 \tag{2.161}$$

$$\frac{|VI|}{|I|} = \frac{m_e}{e}\frac{\left|\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}\right|}{|\mathbf{v}\times\mathbf{B}|} \sim \frac{m_e}{e}\frac{\omega}{B} = \frac{\omega}{\omega_{ce}} \ll 1, \tag{2.162}$$

devido à condição (2.150). Logo o termo V é desprezível frente ao termo de Hall II, enquanto VI pode ser negligenciado frente a I. Como resultado sobram os seguintes termos

$$\mathbf{E}+\mathbf{v}\times\mathbf{B}-\frac{1}{en_e}\mathbf{J}\times\mathbf{B}+\frac{1}{en_e}\nabla p_e+\frac{m_e}{e}\nabla\Phi-\eta\mathbf{J}=0. \tag{2.163}$$

Da equação de movimento (4.2) escrevemos

$$\mathbf{J}\times\mathbf{B}=\rho\nabla\Phi+\rho\frac{d\mathbf{v}}{dt}+\nabla p, \tag{2.164}$$

que, ao ser substituido em (2.163) resulta, após usarmos a quaseneutralidade e o fato de $m_e \ll m_i$,

$$\mathbf{E}+\underbrace{\mathbf{v}\times\mathbf{B}}_{=\mathbf{1}}-\underbrace{\frac{m_i}{e}\frac{d\mathbf{v}}{dt}}_{=\mathbf{2}}-\underbrace{\frac{1}{en_e}\nabla p_i}_{=\mathbf{3}}-\underbrace{\frac{m_i}{e}\nabla\Phi}_{=\mathbf{4}}-\eta\mathbf{J}=0 \tag{2.165}$$

Consideramos, agora, as seguintes razões:

$$\frac{|\mathbf{2}|}{|\mathbf{1}|} = \frac{m_i}{e}\frac{|\partial\mathbf{v}/\partial t|}{|\mathbf{v}\times\mathbf{B}|} \sim \frac{m_i}{e}\frac{\omega}{B} = \frac{\omega}{\omega_{ci}} \ll 1, \tag{2.166}$$

$$\frac{|\mathbf{4}|}{|\mathbf{1}|} = \frac{m_i}{e}\frac{|\nabla\Phi|}{|\mathbf{v}\times\mathbf{B}|} \sim \frac{m_i}{e}\frac{\Phi}{LvB} = \frac{1}{L}\frac{\Phi/v}{\omega_{ci}} \ll 1, \tag{2.167}$$

$$\frac{|\mathbf{3}|}{|\mathbf{1}|} = \frac{1}{en_e}\frac{|\nabla p_i|}{|\mathbf{v}\times\mathbf{B}|} \sim \frac{1}{en_e}\frac{1}{L}\frac{p_i}{vB} = \frac{n_i k_B T_i}{n_e e L v B} = \frac{1}{L}\frac{c_{Ti}}{\omega_{ci}} = \frac{r_i}{L} \ll 1, \tag{2.168}$$

onde L é um comprimento característico, e usamos (1.9), (1.62), (1.68) e ainda o critério (2.151) . Assim os termos **2**, **3** e **4** podem ser desprezados frente aos demais. Portanto, a lei de Ohm generalizada ficará

$$\mathbf{E}+\mathbf{v}\times\mathbf{B}=\eta\mathbf{J}. \tag{2.169}$$

Para interpretarmos esta expressão, lembramos que a lei de Ohm para um condutor em repouso é

$$\mathbf{E}=\eta\mathbf{J}. \tag{2.170}$$

No entanto, se o condutor estiver em movimento com velocidade $\mathbf{v}$, a relação (3.51) vale para o referencial de repouso do fluido, ou seja, o referencial no qual o fluido está em repouso. O campo elétrico $\mathbf{E}'$ no referencial de repouso do fluido está relacionado ao campo elétrico no referencial do laboratório $\mathbf{E}$ pela seguinte expressão relativística [20]

$$\mathbf{E}'=\Gamma(\mathbf{E}+\mathbf{v}\times\mathbf{B})-(\Gamma_L-1)\frac{(\mathbf{E}\cdot\mathbf{v})\mathbf{v}}{v^2}, \tag{2.171}$$

onde o fator de Lorentz é

$$\Gamma_L = \sqrt{\frac{1}{1 - v^2/c^2}}. \tag{2.172}$$

Para velocidades não-relativísticas ($v \ll c$)) temos que $\Gamma_L \approx 1$, de modo que

$$\mathbf{E}' \approx \mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}, \tag{2.173}$$

e a lei de Ohm no referencial do laboratório é escrita como

$$\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B} = \eta \mathbf{J}, \tag{2.174}$$

em conformidade com (6.69).

Em grande parte dos problemas a serem considerados neste livro, tanto para plasmas astrofísicos como de fusão, a resistividade do plasma pode ser desprezada. Esta aproximação, denominada *MHD ideal*, será utilizada nos próximos capítulos de forma sistemática. No entanto, vários problemas de interesse prático nos obrigarão a considerar uma resistividade finita do plasma, o que será feito no Capítulo 8, que abordará este e outros termos dissipativos das equações MHD, como viscosidade e condução térmica. Na MHD ideal teremos, assim, a lei de Ohm generalizada escrita simplesmente como

$$\mathbf{E} = -\mathbf{v} \times \mathbf{B}. \tag{2.175}$$

Substituindo a lei de Ohm generalizada (2.179) na lei de Faraday (6.67) obtemos a relação

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}). \tag{2.176}$$

2.10.3 Resumo das equações da MHD ideal

Enumeramos, agora, as equações da teoria MHD ideal de um fluido, em combinação com as equações de Maxwell aplicáveis a ela:

1. Equação de continuidade

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0. \tag{2.177}$$

2. Equação de movimento

$$\rho \left[\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right] = -\nabla p + \mathbf{J} \times \mathbf{B} - \rho \nabla \Phi. \tag{2.178}$$

3. Lei de Ohm generalizada

$$\mathbf{E} = -\mathbf{v} \times \mathbf{B}, \tag{2.179}$$

4. Equação de energia

$$\frac{d}{dt} \left(p \rho^{-\gamma} \right) = 0, \tag{2.180}$$

5. Lei de Faraday

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \tag{2.181}$$

6. Lei de Ampère
$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}. \tag{2.182}$$

Este é um conjunto de 14 equações escalares ao todo, para 14 campos escalares a serem determinados pela teoria MHD:

- densidade de massa $\rho(\mathbf{r},t)$: 1 campo escalar;
- velocidade do fluido $\mathbf{v}(\mathbf{r},t)$: 3 campos escalares;
- pressão $p(\mathbf{r},t)$: 1 campo escalar;
- densidade de corrente $\mathbf{J}(\mathbf{r},t)$: 3 campos escalares;
- campo elétrico $\mathbf{E}(\mathbf{r},t)$: 3 campos escalares;
- campo magnético $\mathbf{B}(\mathbf{r},t)$: 3 campos escalares.

Como o número de campos escalares é igual ao número de equações escalares, dizemos que o conjunto de equações MHD é "bem-posto". Para resolvê-lo, precisamos ainda de condições iniciais e condições de contorno apropriadas, o que será objeto dos próximos capítulos. Observe que não aparecem aqui as leis de Gauss elétrica ($\nabla \cdot \mathbf{E} \approx 0$) e magnética ($\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$). De fato, elas são desnecessárias do ponto de vista do balanço entre equações e incógnitas da MHD. No entanto são condições necessárias para especificar os campos elétrico e magnético que se façam presentes no sistema.

2.11 Equações da MHD ideal na forma de leis de conservação

Uma das vantagens do conjunto de equações da MHD ideal é que elas podem ser colocadas na forma de leis de conservação, o que facilita tanto cálculos analíticos como também numéricos. A forma geral de uma lei de conservação para uma campo escalar genérico $\psi(\mathbf{r},t)$ é
$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + \nabla \cdot \mathcal{F}(\psi) = 0, \tag{2.183}$$
onde $\mathcal{F}$ representa o fluxo da quantidade ψ. Se ela for uma quantidade vetorial, então seu fluxo será um tensor de segunda ordem.

2.11.1 Conservação da massa

A equação de continuidade (2.177),
$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0, \tag{2.184}$$
representando a lei de conservação de massa, já encontra-se na forma (2.183), com $\psi \to \rho$ e $\mathcal{F} \to \rho\mathbf{v} \equiv \mathbf{j}$, que chamaremos de densidade de fluxo de massa.

2.11.2 Conservação do momentum linear

A equação de movimento para o fluido (2.178), juntamente com a lei de Ampère (2.182), resulta na expressão

$$\rho\left[\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}+(\mathbf{v}\cdot\nabla)\,\mathbf{v}\right]=-\nabla p-\frac{1}{\mu_0}\mathbf{B}\times(\nabla\times\mathbf{B}), \tag{2.185}$$

onde ignoramos os campos gravitacionais.

A quantidade $\rho\mathbf{v}$ representa a densidade de momentum linear do fluido. Usando (2.184) a sua taxa de variação é

$$\frac{\partial(\rho\mathbf{v})}{\partial t}=\rho\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t}-\mathbf{v}\nabla\cdot(\rho\mathbf{v}). \tag{2.186}$$

Substituindo o primeiro termo do segundo membro da relação acima pela equação de movimento (2.185) e usando a identidade

$$\nabla\left(\frac{B^2}{2}\right)=\mathbf{B}\times(\nabla\times\mathbf{B})+(\mathbf{B}\cdot\nabla)\mathbf{B}, \tag{2.187}$$

obtemos

$$\frac{\partial(\rho\mathbf{v})}{\partial t}=\rho(\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{v}-\nabla p-\nabla\left(\frac{B^2}{2\mu_0}\right)+\frac{1}{\mu_0}(\mathbf{B}\cdot\nabla)\mathbf{B}. \tag{2.188}$$

Da álgebra tensorial recordamos as seguintes propriedades

$$\nabla p=\nabla\cdot(p\mathsf{I}), \tag{2.189}$$

$$\nabla\cdot(\rho\mathbf{v}\mathbf{v})=(\nabla\rho\cdot\mathbf{v})\mathbf{v}+\rho\mathbf{v}(\nabla\cdot\mathbf{v})+\rho(\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{v}, \tag{2.190}$$

$$\nabla\cdot(\mathbf{B}\mathbf{B})=(\mathbf{B}\cdot\nabla)\mathbf{B}+\underbrace{(\nabla\cdot\mathbf{B})}_{=0}\mathbf{B}, \tag{2.191}$$

Substituindo todas elas em (2.188), resulta a lei de conservação do momentum linear

$$\frac{\partial(\rho\mathbf{v})}{\partial t}+\nabla\cdot\left[\left(p+\frac{B^2}{2\mu_0}\right)\mathsf{I}+\rho\mathbf{v}\mathbf{v}-\frac{1}{\mu_0}\mathbf{B}\mathbf{B}\right]=0, \tag{2.192}$$

que está na forma geral (2.183)

$$\frac{\partial(\rho\mathbf{v})}{\partial t}+\nabla\cdot\mathbf{\Pi}=0 \tag{2.193}$$

com $\psi\to\rho\mathbf{v}$, e $\mathcal{F}\to\mathbf{\Pi}$ é o tensor de segunda ordem, com as seguintes componentes

$$\Pi_{ij}=\left(p+\frac{B^2}{2\mu_0}\right)\delta_{ij}+\rho v_i v_j-\frac{1}{\mu_0}B_iB_j. \tag{2.194}$$

O tensor acima tem duas partes: uma

$$\rho\mathbf{v}\mathbf{v}+\mathsf{T}=\rho\mathbf{v}\mathbf{v}+p\mathsf{I}, \tag{2.195}$$

que é a densidade de fluxo do momentum linear na ausência do campo magnético, sendo $\mathsf{T}=p\mathsf{I}$ o tensor tensão para o caso isotrópico; e a outra

$$-\frac{\mathbf{B}\mathbf{B}}{\mu_0}+\frac{B^2}{2\mu_0}\mathsf{I}, \tag{2.196}$$

que é o tensor das tensões de Maxwell para um campo puramente magnético [20].

2.11.3 Relações termodinâmicas

Vamos usar o símbolo ε para representar a energia interna específica (por unidade de massa) do fluido. Assim $\rho\varepsilon$ será a densidade de energia interna (por unidade de volume). Pela primeira lei da termodinâmica, para uma massa unitária vale a relação

$$d\varepsilon = Tds - pdV, \tag{2.197}$$

onde T é a temperatura, s a entropia específica e $V = 1/\rho$ é o volume específico. Resulta a equação de Gibbs [17]

$$d\varepsilon = Tds + \frac{p}{\rho^2}d\rho. \tag{2.198}$$

Em processos adiabáticos reversíveis, para os quais a entropia é constante, temos que $ds = 0$, e vale a relação (2.134)

$$p\rho^{-\gamma} = A(s) = const. \tag{2.199}$$

donde (2.198) implica em

$$d\varepsilon = \frac{p}{\rho^2}d\rho = A(s)\rho^{\gamma-2}\,d\rho, \tag{2.200}$$

e que, integrada, fornece a energia interna específica

$$\varepsilon = A(s)\frac{\rho^{\gamma-1}}{\gamma-1} = \frac{p}{\rho(\gamma-1)}. \tag{2.201}$$

A entalpia específica é definida como [18]

$$h = \varepsilon + pV = \varepsilon + \frac{p}{\rho}, \tag{2.202}$$

tal que

$$dh = Tds + Vdp, \tag{2.203}$$

ou ainda

$$dp = \rho dh - \rho Tds. \tag{2.204}$$

Combinando (2.197) e (2.204) resulta em

$$d(\rho\varepsilon) = hd\rho + \rho Tds. \tag{2.205}$$

Assim, de (2.201), a entalpia por unidade de volume será

$$\rho h = \frac{\gamma}{\gamma+1}\,p. \tag{2.206}$$

2.11.4 Conservação da energia

Inicialmente multiplicaremos escalarmente a equação de movimento (2.185) pela velocidade do fluido,

$$\rho\mathbf{v}\cdot\left[\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}\cdot\nabla)\,\mathbf{v}\right] = -\mathbf{v}\cdot\nabla p - \frac{1}{\mu_0}\mathbf{v}\cdot[\mathbf{B}\times(\nabla\times\mathbf{B})]. \tag{2.207}$$

Fazendo o mesmo para a identidade

$$\nabla\left(\frac{v^2}{2}\right) = \mathbf{v}\times(\nabla\times\mathbf{v}) + (\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{v} \tag{2.208}$$

temos que

$$\rho\mathbf{v}\cdot[(\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{v}] = \frac{1}{2}\rho\mathbf{v}\cdot\nabla v^2. \tag{2.209}$$

A quantidade $\rho v^2/2$ é a energia cinética por unidade de volume do fluido, cuja taxa de variação é

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\rho v^2\right) = -\frac{1}{2}v^2\nabla\cdot(\rho\mathbf{v}) + \rho\mathbf{v}\cdot\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t}, \tag{2.210}$$

onde usamos a equação de continuidade (2.177). Portanto

$$\rho\mathbf{v}\cdot\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\rho v^2\right) + \frac{1}{2}v^2\nabla\cdot(\rho\mathbf{v}). \tag{2.211}$$

Usando uma conhecida identidade vetorial, bem como (2.176), escrevemos

$$\nabla\cdot[\mathbf{B}\times(\mathbf{v}\times\mathbf{B})] = -\mathbf{v}\cdot[(\nabla\times\mathbf{B})\times\mathbf{B}] - \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{B^2}{2}\right). \tag{2.212}$$

Inserindo (2.209), (2.211) e (2.212) em (2.210) obtemos

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\rho v^2\right) + \frac{1}{2}v^2\nabla\cdot(\rho\mathbf{v}) + \frac{1}{2}\rho\mathbf{v}\cdot\nabla v^2 &= \\ = -\mathbf{v}\cdot\nabla p - \frac{1}{\mu_0}\nabla\cdot[\mathbf{B}\times(\mathbf{v}\times\mathbf{B})] - \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{B^2}{2\mu_0}\right).\end{aligned} \tag{2.213}$$

Da relação termodinâmica (2.204)

$$\nabla p = \rho\nabla h - \rho T\nabla s, \tag{2.214}$$

tal que reescrevemos (2.210) como

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\rho v^2\right) + \frac{1}{2}v^2\nabla\cdot(\rho\mathbf{v}) + \frac{1}{2}\rho\mathbf{v}\cdot\nabla v^2 &= \\ = -\mathbf{v}\cdot(\rho\nabla h - \rho T\nabla s) - \frac{1}{\mu_0}\nabla\cdot[\mathbf{B}\times(\mathbf{v}\times\mathbf{B})] - \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{B^2}{2\mu_0}\right).\end{aligned} \tag{2.215}$$

Vamos considerar, agora, a taxa de variação da energia interna por unidade de volume. De (2.205) e (2.184) temos

$$\frac{\partial(\rho\varepsilon)}{\partial t} = h\frac{\partial\rho}{\partial t} + \rho T\frac{\partial s}{\partial t} = -h\nabla\cdot(\rho\mathbf{v}) + \rho T\frac{\partial s}{\partial t}. \tag{2.216}$$

Como estamos supondo processos adiabáticos, a entropia específica é constante: $ds/dt = 0$. Usando a derivada convectiva (2.57) essa condição se expressa como

$$\frac{\partial s}{\partial t} + \mathbf{v}\cdot\nabla s = 0, \tag{2.217}$$

que, após inserida em (2.218), leva a

$$\frac{\partial(\rho\varepsilon)}{\partial t} = -h\nabla\cdot(\rho\mathbf{v}) + \rho T\mathbf{v}\cdot\nabla s. \qquad (2.218)$$

Substituindo, agora, o termo $\rho T\mathbf{v}\cdot\nabla s$ em (2.215) pela expressão acima, chegamos finalmente à lei de conservação de energia

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\rho v^2}{2} + \rho\varepsilon + \frac{B^2}{2\mu_0}\right) + \nabla\cdot\left[\rho\mathbf{v}\left(h + \frac{v^2}{2}\right) + \frac{\mathbf{B}\times(\mathbf{v}\times\mathbf{B})}{\mu_0}\right] = 0, \qquad (2.219)$$

onde

$$\psi \to \frac{\rho v^2}{2} + \rho\varepsilon + \frac{B^2}{2\mu_0}, \qquad (2.220)$$

é a densidade de energia total do fluido, igual à densidade de energia cinética $\rho v^2/2$, mais a densidade de energia interna $\rho\varepsilon$, mais a densidade de energia magnética $B^2/2\mu_0$. Já o termo

$$\mathcal{F} \to \rho\mathbf{v}\left(h + \frac{v^2}{2}\right) + \frac{\mathbf{B}\times(\mathbf{v}\times\mathbf{B})}{\mu_0}$$

tem duas partes: uma é a densidade de fluxo de energia devido unicamente ao movimento do fluido, e a outra é a densidade do fluxo de energia magnética, que é o vetor de Poynting correspondente [20]

$$\mathbf{S} = \frac{1}{\mu_0}\mathbf{E}\times\mathbf{B} = \frac{1}{\mu_0}\mathbf{B}\times(\mathbf{v}\times\mathbf{B}), \qquad (2.221)$$

onde usamos (**??**). Lembramos que, devido à nossa hipótese inicial de que o plasma é um fluido perfeitamente condutor, não há perdas de energia por efeito Joule, garantindo assim a conservação da energia magnética.

A lei de conservação de energia (2.219) muitas vezes se escreve substituindo a entropia e a entalpia específicas pelas expressões (2.201) e (2.206), respectivamente, resultando em

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\rho v^2}{2} + \frac{p}{\gamma-1} + \frac{B^2}{2\mu_0}\right) + \nabla\cdot\left[\frac{\gamma}{\gamma-1}p\mathbf{v} + \rho\mathbf{v}\frac{v^2}{2} + \frac{\mathbf{B}\times(\mathbf{v}\times\mathbf{B})}{\mu_0}\right] = 0. \qquad (2.222)$$

2.11.5 Conservação do fluxo magnético

A lei de Faraday, quando aplicada à MHD ideal, nos leva a (2.176), que é

$$\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t} = \nabla\times(\mathbf{v}\times\mathbf{B}). \qquad (2.223)$$

Abrindo o divergente do produto vetorial temos

$$\nabla\times(\mathbf{v}\times\mathbf{B}) = -\mathbf{B}(\nabla\cdot\mathbf{v}) + (\mathbf{B}\cdot\nabla)\mathbf{v} - (\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{B} = -\nabla\cdot(\mathbf{vB} - \mathbf{Bv}), \qquad (2.224)$$

como pode ser verificado por cálculo direto. Assim temos a equação na forma geral

$$\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t} + \nabla\cdot(\mathbf{vB} - \mathbf{Bv}) = 0. \qquad (2.225)$$

A que lei de conservação estamos nos reportando com esta equação? No próximo capítulo veremos que uma das consequências mais importantes de supor o plasma como um condutor perfeito (resistividade nula) é a de que as partículas do plasma estão "congeladas" às linhas de campo magnético, de forma que o fluxo magnético é sempre conservado num movimento do fluido. A relação (3.109) pode ser, assim, interpretada como a forma matemática da conservação do fluxo magnético. O conjunto completo de equações da MHD ideal inclui, ainda, a lei de Gauss magnética

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0. \tag{2.226}$$

Capítulo 3

Fenômenos MHD

No capítulo anterior deduzimos o conjunto de equações MHD tendo como base a equação de Boltzmann e seus momentos. No presente capítulo vamos considerar algumas propriedades gerais das soluções das equações MHD, e analisar com mais detalhes algumas soluções de importância, como a propagação de ondas.

3.1 Conjunto reduzido de equações MHD ideal

As equações da MHD ideal foram obtidas da teoria de um fluido, com o auxílio de uma série de aproximações (por exemplo, restringimo-nos a fenômenos de baixas frequências, plasmas sem viscosidade, comportamento isotrópico, processos adiabáticos, etc.):

- Equação da continuidade

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0, \tag{3.1}$$

- Equação de movimento

$$\rho \left[\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} \right] = -\nabla p + \mathbf{J} \times \mathbf{B}, \tag{3.2}$$

- Equação adiabática ($\gamma = 5/3$)

$$\frac{d}{dt}\left(p\rho^{-\gamma}\right) = 0 \tag{3.3}$$

- Lei de Faraday

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \tag{3.4}$$

- Lei de Ampère

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}, \tag{3.5}$$

- Lei de Ohm generalizada

$$\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B} = \mathbf{0}. \tag{3.6}$$

Tomando o rotacional de (8.6) e usando (8.4) obtemos

$$-\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) = \frac{\eta}{\mu_0} \nabla \times (\nabla \times \mathbf{B}). \tag{3.7}$$

A lei de Gauss magnética $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ não é considerada propriamente uma equação da MHD, mas sim uma restrição aos campos magnéticos que são admissíveis dentro da teoria. Ela nos indica que

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{B}) = -\nabla^2 \mathbf{B} \tag{3.8}$$

o que nos leva à chamada equação de difusão magnética

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) + \frac{\eta}{\mu_0} \nabla^2 \mathbf{B} \tag{3.9}$$

sobre a qual falaremos mais à frente.

Substituindo (8.5) em (8.2) resulta

$$\rho \left[\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right] = -\nabla p + \frac{1}{\mu_0} (\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B}. \tag{3.10}$$

Usando a identidade vetorial

$$\nabla \left(\frac{B^2}{2} \right) = \mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{B}) + (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{B}, \tag{3.11}$$

reescrevemos (8.10) como

$$\rho \left[\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right] = \frac{1}{\mu_0} (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{B} - \nabla \left(p + \frac{B^2}{2\mu_0} \right), \tag{3.12}$$

de forma que eliminamos o campo elétrico e a densidade de corrente das equações MHD.

3.2 Teorema de Alfvén

Um caso importante ocorre quando a resistividade do plasma é nula ($\eta \to 0$), ou seja, ele é um condutor perfeito (não é um supercondutor pois não exibe, por exemplo, o efeito Meissner como num metal a baixíssimas temperaturas). Neste caso, chamado MHD ideal, o tempo de decaimento do campo magnético é infinitamente grande, assim como o próprio número de Reynolds magnético. Devido a (8.50), podemos interpretar este caso como tendo um coeficiente nulo de difusão magnética: $D_M \to 0$. A lei de Ohm generalizada (8.6) fornece, então,

$$\mathbf{E} = -\mathbf{v} \times \mathbf{B}. \tag{3.13}$$

Uma das consequências mais importantes da aproximação de resistividade nula é o chamado teorema de Alfvén [22]: o plasma no interior de um tubo de fluxo magnético permanece sempre dentro do mesmo, na medida em que o tubo se move. Em outras palavras, o plasma no interior do tubo está “congelado” com o próprio fluxo magnético: se o plasma se move, as linhas de força movem-se junto com ele e vice-versa.

Para demonstrar o teorema de Alfvén nós consideramos um caminho fechado C que move-se juntamente com o plasma com velocidade $\mathbf{v}$. Tomando este caminho em

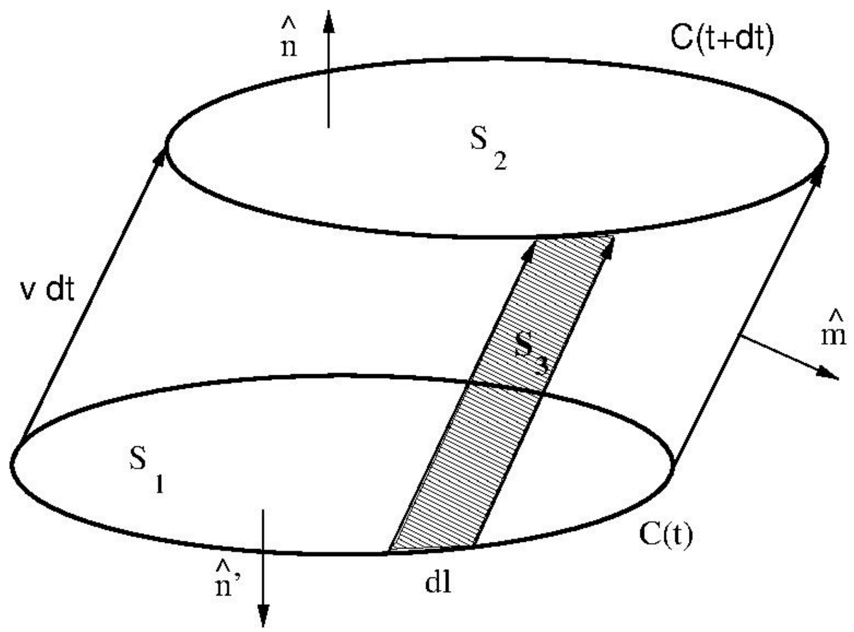

Figura 3.1: Geometria para análise do teorema de Alfvén.

dois instantes de tempo t e $t+\Delta t$ formamos um tubo de fluxo [Fig. 3.1]. Os fluxos magnéticos através das superfícies S_1, S_2 e S_3 são dados, respectivamente, por

$$\Phi_1 = \int_{S_1} da\,\mathbf{B}\cdot\hat{\mathbf{n}}, \qquad \Phi_2 = \int_{S_2} da\,\mathbf{B}\cdot\hat{\mathbf{n}}, \qquad \Phi_3 = \int_{S_3} da\,\mathbf{B}\cdot\hat{\mathbf{m}}, \tag{3.14}$$

onde $\hat{\mathbf{n}}$ é um vetor unitário perpendicular às superfícies S_1 e S_2 (pois elas jazem sobre planos paralelos) e $\hat{\mathbf{m}}$ o é para a superfície lateral S_3.

Integrando a lei de Gauss magnética ($\nabla\cdot\mathbf{B}=0$) no volume delimitado pelas três superfícies, e usando o teorema do divergente teremos

$$\int_{S_1} da\,\mathbf{B}\cdot\hat{\mathbf{n}'} + \int_{S_2} da\,\mathbf{B}\cdot\hat{\mathbf{n}} + \int_{S_3} da\,\mathbf{B}\cdot\hat{\mathbf{m}} = 0, \tag{3.15}$$

onde $\hat{\mathbf{n}'} = -\hat{\mathbf{n}}$. No tempo $t+\Delta t$

$$-\Phi_1(t+\Delta t) + \Phi_2(t+\Delta t) + \Phi_3 = 0. \tag{3.16}$$

A derivada temporal do fluxo magnético será

$$\frac{d\Phi}{dt} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Phi_2(t+\Delta t)-\Phi_1(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Phi_1(t+\Delta t)-\Phi_1(t)-\Phi_3}{\Delta t}, \tag{3.17}$$

onde usamos (3.16). Substituindo (3.14)

$$\frac{d\Phi}{dt} = \int_{S_1} da\,\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}\cdot\hat{\mathbf{n}} - \lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}\int_{S_3} da\,\mathbf{B}\cdot\hat{\mathbf{m}}. \tag{3.18}$$

Da Fig. 3.1 $\hat{\mathbf{m}}\,da = \boldsymbol{d\ell}\times\mathbf{v}\Delta t$, o que transforma a integral em superfície numa integral de linha em (3.18):

$$\frac{d\Phi}{dt} = \int_{S_1} da\,\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}\cdot\hat{\mathbf{n}} - \lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}\int_{C(t)} (\mathbf{v}\times\mathbf{B})\cdot\boldsymbol{d\ell}\Delta t,$$

onde $C(t)$ é um contorno fechado da superfície S_1. Usando, agora, o teorema de Stokes

$$\frac{d\Phi}{dt} = \int_{S_1} da \left[\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} - \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \right] \cdot \hat{\mathbf{n}}. \tag{3.19}$$

Finalmente, usando a equação de difusão magnética (8.48), chegamos à relação

$$\frac{d\Phi}{dt} = D_m \int_{S_1} da \nabla^2 \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}}. \tag{3.20}$$

No caso de resistividade nula (MHD ideal) $D_m \to 0$ e temos, portanto, o teorema de Alfvén:

$$\frac{d\Phi}{dt} = 0, \Rightarrow \Phi = const. \tag{3.21}$$

3.3 Pressão e Tensão Magnéticas

Vamos considerar a equação de movimento reduzida (**??**)

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{1}{\mu_0} (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{B} - \nabla \left(p + \frac{B^2}{2\mu_0} \right), \tag{3.22}$$

onde usamos a notação (2.57) para as derivadas convectivas. Observe que o termo $B^2/2\mu_0$ tem as mesmas dimensões que a pressão cinética p. Por esse motivo, costuma-se chamar esse termo de pressão magnética

$$p_m \equiv \frac{B^2}{2\mu_0} \tag{3.23}$$

O chamado "beta" do plasma é a razão entre as pressões cinética e magnética [6]:

$$\beta = \frac{p}{p_m} = \frac{2\mu_0 p}{B^2}. \tag{3.24}$$

O plasma, sendo um gás ionizado, tende a se expandir no espaço livre devido à sua pressão cinética. Se um plasma está confinado por campos magnéticos, é necessário, portanto, que $\beta < 1$. Sistemas de confinamento magnético de plasmas têm valores tipicamente baixos de β, da ordem de $0,1$ ou 10%. De modo geral, estes valores baixos ocorrem devido a uma série de instabilidades que ocorrem em plasmas magneticamente confinados. Já no contexto astrofísico estes valores são ainda menores: na coroa solar, por exemplo, β é da ordem de $0,01$.

O primeiro termo do lado direito da equação de movimento tem uma interessante interpretação física: seja $\hat{\mathbf{b}}$ um vetor unitário ao longo do campo magnético em cada ponto da respectiva linha de força, e seja s a distância percorrida ao longo da linha de força, medida a partir de algum ponto de referência [Fig. 3.2][21]. Então

$$\mathbf{B} = B\hat{\mathbf{b}}, \qquad \mathbf{B} \cdot \nabla = B \frac{\partial}{\partial s}, \tag{3.25}$$

de modo que

$$\frac{1}{\mu_0} (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{B} = \frac{B}{\mu_0} \frac{\partial}{\partial s} (B\hat{\mathbf{b}}) = \hat{\mathbf{b}} \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{B^2}{2\mu_0} \right) + \frac{B^2}{\mu_0} \frac{\partial \hat{\mathbf{b}}}{\partial s} \tag{3.26}$$

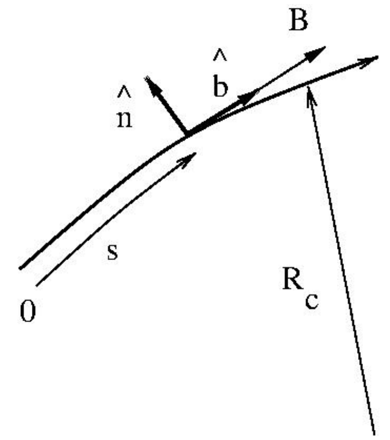

Figura 3.2: Definição dos vetores unitários para uma linha de campo.

Seja $\hat{\mathbf{n}}$ a normal principal à linha de força em cada ponto. Pelas fórmulas de Frenet-Serret [23]

$$\frac{\partial \hat{\mathbf{b}}}{\partial s} = \frac{\hat{\mathbf{n}}}{R_c}, \tag{3.27}$$

onde R_c é o raio de curvatura (que varia ponto a ponto ao longo da linha de força). Então, usando (3.23)

$$\frac{1}{\mu_0}(\mathbf{B}\cdot\nabla)\mathbf{B} = \hat{\mathbf{b}}\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{B^2}{2\mu_0}\right) + \frac{B^2}{2\mu_0}\frac{2\hat{\mathbf{n}}}{R_c} = \frac{\partial p_m}{\partial s}\hat{\mathbf{b}} + \frac{2p_m}{R_c}\hat{\mathbf{n}}, \tag{3.28}$$

de forma que este termo tem duas componentes: uma ao longo da linha de força e outra normal a ela. A componente paralela tende a "esticar" a linha de força, ao passo que a componente normal (direcionada ao longo do seu raio de curvatura) tende a "endireitá-la". Por esses motivos o termo $(\mathbf{B}\cdot\nabla)\mathbf{B}/\mu_0$ é chamado tensão magnética.

Substituindo (3.28) na equação de movimento (**??**) temos

$$\rho\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{1}{\mu_0}(\mathbf{B}\cdot\nabla)\mathbf{B} - \nabla(p + p_m), \tag{3.29}$$

que pode ser interpretada da seguinte forma: o lado esquerdo é a densidade de força atuando sobre o plasma, então o lado direito tem duas contribuições, uma é o gradiente da pressão total $p + p_m$, outra é a tensão magnética.

3.4 Ondas de Alfvén

Pelo teorema de Alfvén, sabemos que no caso de resistividade nula o plasma está vinculado às linhas de força, ou seja, se elas de alguma forma vibram o plasma vibrará em conjunto com elas. Este é o caso das chamadas ondas Alfvén, que são ondas de baixa frequência em plasmas magnetizados. Estas ondas propagam-se ao longo das linhas de força do campo magnético.

Uma simplificação que pode ser feita numa primeira abordagem é negligenciar a temperatura, ou seja, a pressão cinética será $p = nk_BT = 0$. Isto dispensa o uso da equação adiabática no conjunto reduzido de equações da MHD ideal ($\eta = 0$), que fica:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0, \tag{3.30}$$

$$\rho \left[\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} \right] = \frac{1}{\mu_0}(\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{B} - \nabla \left(\frac{B^2}{2\mu_0} \right), \tag{3.31}$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}). \tag{3.32}$$

Nós consideramos a propagação da onda como uma perturbação fraca da situação de equilíbrio, para a qual $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ e $\rho = \rho_0$. Então as quantidades relacionadas à onda são presumidas muito pequenas, ou seja, de primeira ordem em relação às quantidades do equilíbrio:

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_1, \qquad (B_1 \ll B_0), \tag{3.33}$$

$$\mathbf{v} = \mathbf{0} + \mathbf{v}_1, \qquad (v_1 \ll 1), \tag{3.34}$$

$$\rho = \rho_0 + \rho_1, \qquad (\rho_1 \ll \rho_0). \tag{3.35}$$

Substituindo (3.33)-(3.35) nas equações (3.30)-(3.32) e desprezando termos de ordem igual a dois (por exemplo, o produto de dois termos de primeira ordem) temos as seguintes equações linearizadas

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} = -\rho_0 \nabla \cdot \mathbf{v}_1 \tag{3.36}$$

$$\mu_0 \rho_0 \frac{\partial \mathbf{v}_1}{\partial t} = (\mathbf{B}_0 \cdot \nabla)\mathbf{B}_1 + (\mathbf{B}_1 \cdot \nabla)\mathbf{B}_0 - \nabla (\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{B}_1) \tag{3.37}$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}_1}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{v}_1 \times \mathbf{B}_0). \tag{3.38}$$

Escolheremos a seguinte geometria para o problema: vamos considerar o campo magnético externo na direção z: $\mathbf{B}_0 = B_0 \hat{e}_z$, de forma que o vetor de onda da propagação tem a mesma direção: $\mathbf{k} = k\hat{e}_z$ [2]. Supomos, também, que v_1 e B_1 estejam alinhados com o eixo y [Fig. 3.3(a)]. Então o conjunto de equações linearizadas é desdobrado nas seguintes componentes:

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} = -\rho_0 \frac{\partial v_1}{\partial y}, \tag{3.39}$$

$$\mu_0 \rho_0 \frac{\partial v_1}{\partial t} = B_0 \frac{\partial B_1}{\partial z}, \tag{3.40}$$

$$\frac{\partial B_1}{\partial t} = B_0 \frac{\partial v_1}{\partial z}, \tag{3.41}$$

$$0 = B_0 \frac{\partial v_1}{\partial y}. \tag{3.42}$$

De (3.42) segue que v_1 não depende de y e, portanto, (3.39) implica em $\partial \rho_1 / \partial t = 0$. Logo ρ_1 é uma constante que pode, sem perda de generalidade, ser igualada a zero. Concluímos que a propagação dessa onda é um processo incompressível, pois a densidade do plasma não varia com o tempo.

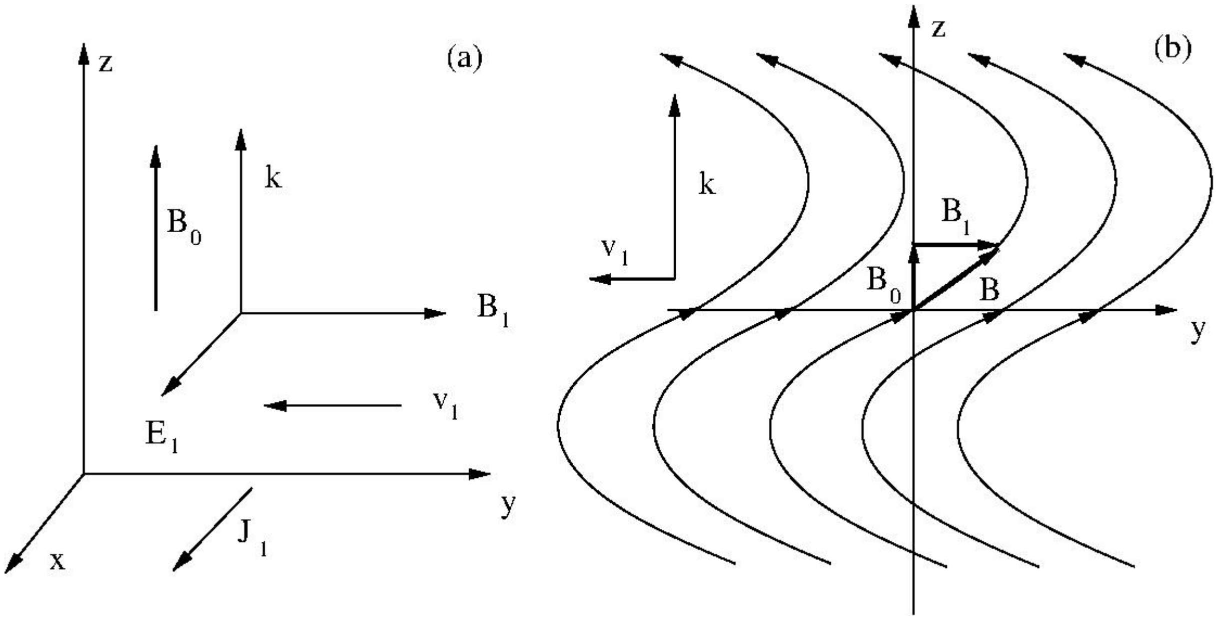

Figura 3.3: (a) Geometria da propagação de uma onda Alfvén. (b) Distorção das linhas de campo magnético devido a uma onda Alfvén.

Derivando (3.40) em relação a z, (3.41) em relação a t, termos a seguinte equação para a perturbação do campo magnético:

$$\frac{\partial^2 B_1}{\partial z^2} - \frac{\rho_0 \mu_0}{B_0^2} \frac{\partial^2 B_1}{\partial t^2} = 0, \tag{3.43}$$

que representa a propagação de uma onda ao longo da direção z com a chamada velocidade de Alfvén [22]

$$v_A = \frac{B_0}{\sqrt{\mu_0 \rho_0}}, \tag{3.44}$$

onde $\rho \approx n_i m_i$, de forma que a densidade de massa dos íons é responsável pela inércia, e a tensão magnética faz o papel de força restauradora.

Um raciocínio similar leva à mesma equação de onda para v_1, a saber

$$\frac{\partial^2 v_1}{\partial z^2} - \frac{\rho_0 \mu_0}{B_0^2} \frac{\partial^2 v_1}{\partial t^2} = 0, \tag{3.45}$$

Podemos supor a existência de soluções de (3.43) e (3.45) na forma de número de onda $k = 2\pi/\lambda$ e ondas planas de frequência angular ω, na forma

$$B_1(z,t) = \tilde{B}_1 \, e^{i(kz-\omega t)}, \tag{3.46}$$

$$v_1(z,t) = \tilde{v}_1 \, e^{i(kz-\omega t)}, \tag{3.47}$$

onde as quantidades com til significam amplitudes. Substituindo (3.46) em (3.43) [(3.47) em (3.45), respectivamente] concluimos que as velocidades de fase tanto de B_1 como de v_1 são iguais a

$$\frac{\omega}{k} = v_A, \tag{3.48}$$

o que é na verdade uma consequência do teorema de Alfvén, já que o fluido oscila com a mesma velocidade de fase e frequência que as próprias linhas de força. Observe que, como ω é proporcional a k, a velocidade de grupo é igual à velocidade de fase, ou seja, as ondas de Alfvén são não-dispersivas.

Substituindo (3.46) e (3.47) em (3.40) obtemos, após dividir pelo fator comum $e^{i(kz-\omega t)}$,

$$-i\omega\mu_0\rho_0\tilde{v}_1 = ikB_0\tilde{B}_1 \tag{3.49}$$

Usando (3.48) e (3.44) a velocidade do plasma será

$$\tilde{v}_1 = -\frac{B_0\tilde{B}_1}{\rho_0\mu_0 v_A} = -\frac{\tilde{B}_1}{\sqrt{\mu_0\rho_0}}. \tag{3.50}$$

A Lei de Ohm generalizada (2.179) fornece, em primeira ordem de perturbação

$$\tilde{\mathbf{E}}_1 = -\tilde{\mathbf{v}}_1 \times \mathbf{B}_0. \tag{3.51}$$

Supondo que o campo elétrico seja paralelo à velocidade do plasma, (3.50) fornece

$$\tilde{E}_1 = -B_0\tilde{v}_1 = \frac{B_0\tilde{B}_1}{\sqrt{\mu_0\rho_0}}. \tag{3.52}$$

Fazendo o produto vetorial de (2.179) com $\mathbf{B}_0$ é possível expressar a velocidade do plasma em função do campo elétrico:

$$\tilde{\mathbf{v}}_1 = \frac{\tilde{\mathbf{E}}_1 \times \mathbf{B}_0}{B_0^2} \tag{3.53}$$

que pode ser reconhecida como a velocidade de deriva $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ de uma partícula do plasma sob a influência de campos magnético e elétrico mutuamente perpendiculares, dada por (1.82). Como a velocidade de deriva não depende da carga, aquela será a mesma para elétrons e íons, donde podemos falar de uma deriva do plasma como um todo com a velocidade (3.53).

Devido à geometria adotada para nosso sistema, a velocidade de deriva atua ao longo do eixo x. Devido ao teorema de Alfvén (válido no caso de resistividade nula) as partículas do plasma estão "congeladas" às linhas de campo magnético: a distorção no campo magnético $\mathbf{B}_1$ tem a mesma direção da velocidade de deriva e ambas são perpendiculares à direção de propagação. Esta onda de Alfvén é transversal, e também chamada onda Alfvén de cizalhamento. Numa onda Alfvén de cizalhamento as linhas de campo magnético, originalmente na direção z, ganham ondulações geradas pela perturbação do campo na mesma direção da velocidade de deriva [Fig. 3.3(b)].

Uma interessante analogia aparece quando comparamos as ondas de Alfvén com ondas elásticas propagando-se numa corda esticada. Para elas temos que $\omega = kv_T$, onde a velocidade de fase é $v_T = \sqrt{T/\rho}$, na qual T é a tensão na corda e ρ é a massa por unidade de comprimento. Comparando com (3.44), podemos identificar a pressão magnética $p_m = B_0^2/2\mu_0$ com a tensão por unidade de área. Como a densidade do plasma ρ_0 é a massa por unidade de volume, a onda de Alfvén de cizalhamento pode ser imaginada como uma perturbação das próprias linhas de força, como se estas possem esticadas.

3.5 Ondas Magnetossônicas

As ondas Alfvén de cizalhamento, que vimos na seção anterior, são ondas transversais, pois a perturbação do campo magnético é perpendicular à direção de propagação da onda (que, por sua vez, é paralela ao campo magnético de equilíbrio). Há outra categoria de ondas MHD, chamadas ondas magnetossônicas, que são longitudinais pois a direção de propagação é paralela a B_1 (mas perpendicular a B_0). Para estas ondas é necessário incluir o efeito da temperatura do plasma, de modo que precisamos acrescentar a equação adiabática no conjunto reduzido de equações da MHD ideal

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0, \tag{3.54}$$

$$\rho \left[\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} \right] = \frac{1}{\mu_0}(\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{B} - \nabla \left(p + \frac{B^2}{2\mu_0} \right), \tag{3.55}$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}), \tag{3.56}$$

$$p\rho^{-\gamma} = const. \tag{3.57}$$

Considerando, como na seção anterior, a propagação da onda como uma perturbação da situação de equilíbrio, teremos

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_1, \qquad (B_1 \ll B_0), \tag{3.58}$$

$$\mathbf{v} = \mathbf{0} + \mathbf{v}_1, \qquad (v_1 \ll 1), \tag{3.59}$$

$$\rho = \rho_0 + \rho_1, \qquad (\rho_1 \ll \rho_0), \tag{3.60}$$

$$p = p_0 + p_1, \qquad (p_1 \ll p_0), \tag{3.61}$$

que, substituidas em (3.54)-(3.57), e desprezando termos de ordem superior, conduzem às equações linearizadas

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} = -\rho_0 \nabla \cdot \mathbf{v}_1 \tag{3.62}$$

$$\rho_0 \frac{\partial \mathbf{v}_1}{\partial t} = \frac{1}{\mu_0} (\mathbf{B}_0 \cdot \nabla)\mathbf{B}_1 - \nabla p_1 - \frac{1}{\mu_0} \nabla (\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{B}_1) \tag{3.63}$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}_1}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{v}_1 \times \mathbf{B}_0). \tag{3.64}$$

De (3.57) temos

$$\nabla p = \frac{\gamma p}{\rho} \nabla \rho. \tag{3.65}$$

Se a direção de propagação da onda é y, o vetor de propagação será $\mathbf{k} = k\hat{e}_y$. Com um campo magnético principal $\mathbf{B}_0 = B_0 \hat{e}_z$, e supondo ondas planas da forma $\exp[i(ky - \omega t)]$, teremos as seguintes componentes das equações linearizadas

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} = -\rho_0 \frac{\partial v_{1y}}{\partial y} \tag{3.66}$$

$$\rho_0 \frac{\partial v_{1x}}{\partial t} = 0, \tag{3.67}$$

$$\rho_0 \frac{\partial v_{1y}}{\partial t} = -\frac{\gamma p_0}{\rho_0} \frac{\partial \rho_1}{\partial y} - \frac{B_0}{\mu_0} \frac{\partial B_{1z}}{\partial y}, \tag{3.68}$$

$$\rho_0 \frac{\partial v_{1z}}{\partial t} = 0, \tag{3.69}$$

$$\frac{\partial B_{1x}}{\partial t} = 0, \tag{3.70}$$

$$\frac{\partial B_{1y}}{\partial t} = 0, \tag{3.71}$$

$$\frac{\partial B_{1z}}{\partial t} = -B_0 \frac{\partial v_{1y}}{\partial y}, \tag{3.72}$$

onde supomos que v_{1x} e v_{1z} não sejam funções da posição,

As equações (3.67) e (3.69) mostram que v_{1x} e v_{1z} não dependem do tempo, assim como (3.70) e (3.71) indicam que B_{1x} e B_{1y} também não. Derivando (3.68) em relação ao tempo e substituindo (3.66) e (3.72) obtemos uma equação de onda para v_{1y}:

$$\frac{\partial^2 v_{1y}}{\partial y^2} - \frac{1}{v_{MS}^2} \frac{\partial^2 v_{1y}}{\partial t^2} = 0, \tag{3.73}$$

onde a velocidade de propagação é

$$v_{MS}^2 = \frac{\gamma p_0}{\rho_0} + \frac{B_0^2}{\mu_0 \rho_0} = v_S^2 + v_A^2, \tag{3.74}$$

sendo v_A a velocidade Alfvén (3.44) e

$$v_S = \sqrt{\frac{\gamma p_0}{\rho_0}} \tag{3.75}$$

a velocidade do som no gás. O campo elétrico da onda é dado pela lei de Ohm generalizada como

$$\mathbf{E_1} = -\mathbf{v}_1 \times \mathbf{B}_0 = -v_{1y} B_0 \,\hat{\mathbf{e}}_x. \tag{3.76}$$

A onda magnetosônica é, de fato, uma onda acústica na qual as compressões e rarefações do gás não são produzidas pelos movimentos ao longo de $\mathbf{E}$, mas sim pelas derivas $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ através do campo elétrico. Se $B_0 = 0$ então $v_{MS} = v_S$ e teremos uma onda sonora, ao passo que, se $p_0 = 0$, então $v_{MS} = v_A$ e uma onda Alfvén. No entanto, esta onda Alfvén é compressional, por ser longitudinal, ao passo que a onda Alfvén descrita na seção anterior é transversal, também chamada onda cizalhante ("shear"). No caso geral, o beta do plasma, definido em (3.24), será dado por

$$\beta = \frac{2}{\gamma} \left(\frac{v_S}{v_A} \right)^2 \approx \left(\frac{v_S}{v_A} \right)^2. \tag{3.77}$$

Desta forma, num plasma de baixo β, resulta que a velocidade de propagação da onda magnetossônica é muito menor do que a velocidade Alfvén.

3.6 Relação de dispersão para ondas magnetohidrodinâmicas

Vamos considerar, agora, o problema mais geral de quando o vetor de propagação da onda $\mathbf{k}$ faz um ângulo θ arbitrário com o campo magnético principal $\mathbf{B}_0$, e levando em conta a temperatura do plasma. Partimos das equações MHD linearizadas, que aqui reescrevemos:

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} = -\rho_0 \nabla \cdot \mathbf{v}_1 \tag{3.78}$$

$$\rho_0 \frac{\partial \mathbf{v}_1}{\partial t} = -\nabla p_1 + \frac{1}{\mu_0}(\nabla \times \mathbf{B}_1) \times \mathbf{B}_0, \tag{3.79}$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}_1}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{v}_1 \times \mathbf{B}_0), \tag{3.80}$$

$$\frac{\partial p_1}{\partial t} = \frac{\gamma p_0}{\rho_0}\frac{\partial \rho_1}{\partial t}. \tag{3.81}$$

Supondo soluções do tipo ondas planas:

$$\rho_1(\mathbf{r},t) = \tilde{\rho}_1 e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)}, \tag{3.82}$$

$$p_1(\mathbf{r},t) = \tilde{p}_1 e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)}, \tag{3.83}$$

$$\mathbf{B}_1(\mathbf{r},t) = \tilde{\mathbf{B}}_1 e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)}, \tag{3.84}$$

$$\mathbf{v}_1(\mathbf{r},t) = \tilde{\mathbf{v}}_1 e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)}, \tag{3.85}$$

podemos fazer as substituições

$$\nabla \to i\mathbf{k}, \qquad \frac{\partial}{\partial t} \to -i\omega,$$

e transformar as equações diferenciais (3.78)-(3.81) em equações algébricas, a saber:

$$\omega\tilde{\rho}_1 = \rho_0 \mathbf{k}\cdot\tilde{\mathbf{v}}_1 \tag{3.86}$$

$$\omega\rho_0\tilde{\mathbf{v}}_1 = \mathbf{k}\tilde{p}_1 - \frac{1}{\mu_0}(\mathbf{k}\times\tilde{\mathbf{B}}_1)\times\mathbf{B}_0, \tag{3.87}$$

$$\omega\tilde{\mathbf{B}}_1 = -\mathbf{k}\times(\tilde{\mathbf{v}}_1\times\mathbf{B}_0), \tag{3.88}$$

$$\omega\left(\frac{\tilde{p}_1}{p_0} - \frac{\gamma\tilde{\rho}_1}{\rho_0}\right) = 0. \tag{3.89}$$

Isolamos $\tilde{\rho}_1$ em (3.86) e $\tilde{p}_1$ em (3.89), de sorte que

$$\tilde{\rho}_1 = \rho_0 \frac{\mathbf{k}\cdot\tilde{\mathbf{v}}_1}{\omega}, \tag{3.90}$$

$$\tilde{p}_1 = \gamma p_0 \frac{\mathbf{k}\cdot\tilde{\mathbf{v}}_1}{\omega}, \tag{3.91}$$

Extraindo $\tilde{\mathbf{B}}_1$ de (3.88) e substituindo tudo em (3.87), esta torna-se uma expressão envolvendo apenas a velocidade como quantidade de primeira ordem:

$$\left[\omega^2 - \frac{(\mathbf{k}\cdot\mathbf{B}_0)^2}{\mu_0\rho_0}\right]\tilde{\mathbf{v}}_1 = \left[\left(\frac{\gamma p_0}{\rho_0} + \frac{B_0^2}{\mu_0\rho_0}\right)\mathbf{k} - \frac{\mathbf{k}\cdot\mathbf{B}_0}{\mu_0\rho_0}\mathbf{B}_0\right](\mathbf{k}\cdot\tilde{\mathbf{v}}_1) - \frac{(\mathbf{k}\cdot\mathbf{B}_0)(\tilde{\mathbf{v}}_1\cdot\mathbf{B}_0)}{\mu_0\rho_0}\mathbf{k}. \tag{3.92}$$

Escolhendo, sem perda de generalidade, o campo magnético principal ao longo do eixo z, e o vetor de propagação no plano xz, fazendo um ângulo θ com $\mathbf{B}_0$, e usando (3.44) e (3.75), obtemos [24]

$$\left(\omega^2 - \frac{k^2 B_0^2 \cos^2\theta}{\mu_0\rho_0}\right)\tilde{\mathbf{v}}_1 = \left[(v_S^2 + v_A^2)\mathbf{k} - \frac{kB_0^2\cos\theta}{\mu_0\rho_0}\hat{\mathbf{e}}_z\right] k(\sin\theta\tilde{v}_{1x} + \cos\theta\tilde{v}_{1z}) - \frac{k^2 B_0^2 \cos\theta\tilde{v}_{1z}}{\mu_0\rho_0}(\sin\theta\hat{\mathbf{e}}_x + \cos\theta\hat{\mathbf{e}}_z). \tag{3.93}$$

Desdobrando a equação acima em componentes cartesianas temos o sistema linear homogêneo:

$$\begin{pmatrix} \omega^2 - k^2v_A^2 - k^2v_S^2\sin^2\theta & 0 & -k^2v_S^2\sin\theta\cos\theta \\ 0 & \omega^2 - k^2v_A^2\cos^2\theta & 0 \\ -k^2v_S^2\sin\theta\cos\theta & \omega^2 - k^2v_S^2\sin^2\theta & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \tilde{v}_{1x} \\ \tilde{v}_{1y} \\ \tilde{v}_{1z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{3.94}$$

que terá uma solução não-trivial se e somente se o determinante da matriz dos coeficientes for nulo. Esta condição resulta numa equação algébrica para ω, que é a relação de dispersão geral para ondas MHD [24]

$$(\omega^2 - k^2v_A^2\cos^2\theta)[\omega^4 - \omega^2k^2(v_A^2 + v_S^2) + k^4v_A^2v_S^2\cos^2\theta] = 0. \tag{3.95}$$

As raízes da relação de dispersão identificam os diferentes modos possíveis. Uma raiz imediata é

$$\omega = kv_A\cos\theta \tag{3.96}$$

que é a relação (3.48) para ondas de Alfvén de cizalhamento, com o módulo do vetor de propagação igual a $k\cos\theta$, que é a componente de $\mathbf{k}$ na direção do campo magnético principal. A solução associada a este modo é

$$\begin{pmatrix} 0 \\ \tilde{v}_{1y} \\ 0 \end{pmatrix}$$

de modo que $\mathbf{k}\cdot\tilde{\mathbf{v}}_1 = 0$. De (3.90) e (3.91) temos que $\tilde{\rho}_1 = 0$ e $\tilde{p}_1 = 0$, ou seja, não haverá perturbações na densidade ou na pressão do plasma devido a este modo. Além disso, como $\tilde{\mathbf{v}}_1\cdot\mathbf{B}_0 = 0$, o movimento do fluido é perpendicular ao campo magnético principal, provocando as onduções nas linhas de campo magnético características das ondas de Alfvén de cizalhamento. Concluimos ainda que a inclusão dos efeitos da temperatura do plasma não altera as características essenciais deste tipo de onda.

As raízes positivas da equação biquadrática que aparece em (5.121) podem ser escritas como

$$\omega_1 = kv_R, \qquad \omega_2 = kv_L, \tag{3.97}$$

onde

$$v_{R,L} = \left\{\frac{1}{2}\left[v_A^2 + v_S^2 \pm \sqrt{(v_A^2 + v_S^2)^2 - 4v_A^2v_S^2\cos^2\theta}\right]\right\}^{1/2}. \tag{3.98}$$

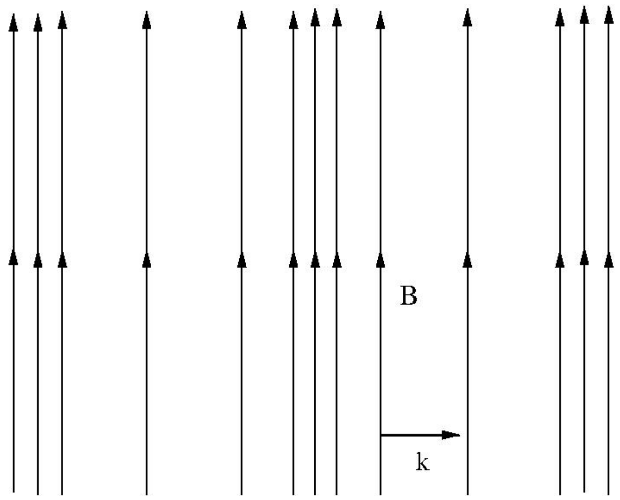

Figura 3.4: Perturbação no campo magnético associada a uma onda de Alfvén compressional.

Como $v_R \geq v_L$ chamamos v_R de velocidade da onda magnetosônica rápida, e v_L de velocidade da onda lenta. Associamos a tais modos a solução

$$\begin{pmatrix} \tilde{v}_{1x} \\ 0 \\ \tilde{v}_{1z} \end{pmatrix},$$

tal que $\mathbf{k} \cdot \tilde{\mathbf{v}}_1 \neq 0$ e $\tilde{\mathbf{v}}_1 \cdot \mathbf{B}_0 \neq 0$. Portanto para os modos rápido e lento haverá perturbações na densidade e na pressão, e o movimento será tanto paralelo quanto perpendicular ao campo magnético.

No caso particular de $\theta = \pi/2$ (onda propagando-se na direção perpendicular ao campo magnético principal) resulta que

$$v_R = \sqrt{v_A^2 + v_S^2} = v_{MS}, \qquad v_L = 0, \tag{3.99}$$

ou seja, a onda magnetosônica rápida é justamente aquela que mostramos na seção anterior, ao passo que desparece a onda magnetosônica lenta.

Outro caso particular de interesse é o limite de temperatura nula (plasma "frio"), para o qual $v_s \to 0$ e

$$v_R = v_A, \qquad v_L = 0, \tag{3.100}$$

Aqui, também, desaparecerá a onda lenta, enquanto a onda rápida satisfaz a mesma relação para uma onda de Alfvén de cizalhamento (3.48). Mas neste caso, como $\tilde{\mathbf{v}}_1 \cdot \mathbf{B}_0 \neq 0$ nós temos uma onda de Alfvén diferente, que chamamos onda de Alfvén compressional, na qual a distorção característica do campo magnético é uma compressão das linhas de campo sem dobrá-las, como na onda de cizalhamento [Fig. 8.1]. De fato, a onda magnetossônica rápida pode ser encarada como uma onda de Alfvén compressional modificada por uma pressão não-nula.

Para plasmas com baixo β temos que $v_A \gg v_S$, de modo que a relação de dispersão para a onda magnetossônica lenta reduz-se à forma

$$\omega \approx k v_S \cos\theta = v_S k_\parallel, \tag{3.101}$$

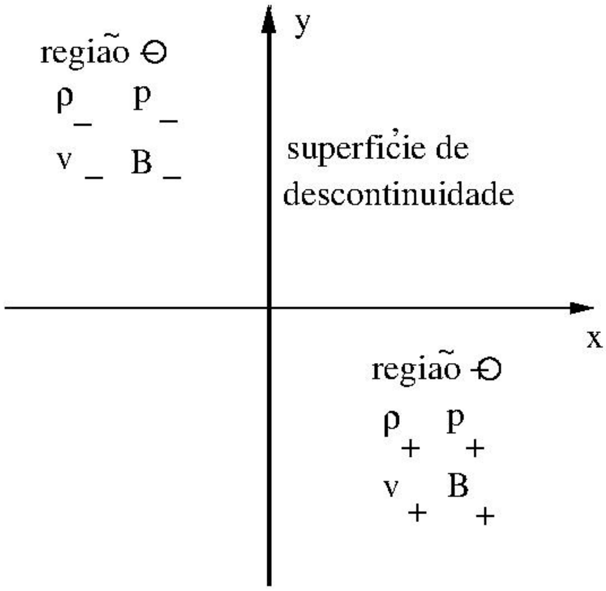

Figura 3.5: Grandezas em ambos os lados de uma superfície de descontinuidade.

a qual é a relação válida para uma onda acústica propagando-se ao longo das linhas de campo magnético. Assim, para baixo β a onda lenta é uma onda sonora modificada pela presença do campo magnético.

3.7 Descontinuidades em MHD

As ondas MHD descritas nas seções precedentes caracterizam-se essencialmente pela presença de pequenas perturbações nos campos de pressão, densidade, velocidade e indução magnética, o que nos permitiu linearizar as equações MHD para a obtenção de equações de onda e as respectivas relações de dispersão. No entanto, existem ondas MHD que não podem ser associadas a pequenas perturbações das quantidades físicas. O exemplo mais eloquente é o das ondas de choque, que propagam-se à velocidades maiores do que a velocidade do som no plasma. Numa onda de Alfvén ou magnetossônica que se propague com velocidade menor do que a velocidade do som, as ondas se propagam à frente da perturbação que as causou, dando um "aviso antecipado" da sua chegada ao observador. Assim a resposta do fluido pode ser suave e adiabática, como temos suposto até agora.

No entanto, numa onda supersônica a perturbação propaga-se à frente das ondas, que assim não podem dar o aviso antecipado de sua chegada, de forma que a resposta do fluido é abrupta e não-adiabática. A onda de choque resultante pode ser caracterizada como uma superfície de descontinuidade, pois as quantidades como pressão, densidade, temperatura e indução magnética apresentam fortes descontinuidades através da superfície. As equações MHD, neste caso, não podem mais ser linearizadas. Nossa estratégia será outra: consideraremos as equações da MHD ideal na forma de leis de conservação e integraremos tais equações através da superfície de descontinuidade, permitindo calcular o salto das quantidades físicas dos dois lados da superfície de descontinuidade.

Vamos considerar, por simplicidade, que o movimento do fluido seja unidimensional, ao longo da direção x, e que as quantidades físicas em ambos os lados tenham valores constantes e uniformes. Nesse caso a superfície de descontinuidade, aqui denotada por $\mathcal{S}$, será um plano paralelo ao plano yz caracterizado pela posição $x_s(t)$. As regiões à esquerda e à direita de $\mathcal{S}$ serão denotadas pelos índices $-$ e $+$, respectivamente [Fig. 3.5]. O salto da quantidade genérica χ através de $\mathcal{S}$ será

$$[\![\chi]\!] = \chi_+ - \chi_-. \tag{3.102}$$

Partimos da lei de conservação na forma geral (2.183) vista no Capítulo anterior e que, no caso unidimensional, reduz-se a

$$\frac{\partial \chi}{\partial t} + \frac{\partial \mathcal{F}(\chi)}{\partial x} = 0. \tag{3.103}$$

Sejam x_- e x_+ duas posições fixas nas regiões em ambos os lados de $\mathcal{S}$, tal que $x_- \leq x_s(t) \leq x_+$. Integrando a relação acima neste intervalo temos

$$\int_{x_-}^{x_+} \frac{\partial \chi}{\partial t} dx = -\int_{x_-}^{x_+} d\mathcal{F}$$

$$\frac{d}{dt}\left\{\int_{x_-}^{x_s(t)} \chi dx + \int_{x_s(t)}^{x_+} \chi dx\right\} = -\mathcal{F}(\chi(x_+)) + \mathcal{F}(\chi(x_-)),$$

Definindo

$$\chi_\pm = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \chi(x_s \pm \varepsilon), \tag{3.104}$$

temos, usando a fórmula de Leibnitz [23] e fazendo ε tender a zero,

$$u_s [\![\chi]\!] = [\![\mathcal{F}(\chi)]\!], \tag{3.105}$$

que chamamos "condição de salto".

Supondo que a superfície $\mathcal{S}$ se desloque com velocidade constante $u_s = dx_s/dt$, é conveniente passarmos para um referencial que se move juntamente com $\mathcal{S}$, de forma que a condição de salto reduz-se a

$$[\![\mathcal{F}(\chi)]\!] = 0. \tag{3.106}$$

3.8 Relações de Rankine-Hugoniot na MHD

As relações de Rankine-Hugoniot MHD conectam as variáveis dos dois lados de uma superfície de descontinuidade, e decorrem da aplicação da condição de salto (3.106) às leis de conservação para a MHD ideal vistas no capítulo anterior. Assim, vamos considerar cada caso em separado [16].

3.8.1 Conservação de massa

Em uma dimensão, a lei de conservação de massa (2.184) é

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\rho v_x)}{\partial x} = 0, \tag{3.107}$$

tal que $\chi \to \rho$ e $\mathcal{F} \to \rho v_x$, de modo que a condição de salto (3.106) fica

$$[\![\rho v_x]\!] = \rho_+ v_{x+} - \rho_- v_{x-} = j_+ - j_- = 0, \tag{3.108}$$

onde $j = \rho v_x$ é a densidade de fluxo de massa.

3.8.2 Lei de Gauss magnética

A lei de Gauss magnética, em uma dimensão, é

$$\frac{\partial B_x}{\partial x} = 0. \tag{3.109}$$

de forma que $\chi \to 0$ e $\mathcal{F} = B_x$, com a condição de salto

$$[\![B_x]\!] = B_{x+} - B_{x-} = 0. \tag{3.110}$$

Daqui para a frente vamos supor, sem perda de generalidade, que $\mathbf{v} = (v_x, v_y, 0)$ e $\mathbf{B} = (B_x, B_y, 0)$ em ambos os lados da superfície de descontinuidade $\mathcal{S}$.

3.8.3 Conservação do momentum linear

A expressão de conservação do momentum (2.193) é, em uma dimensão,

$$\frac{\partial(\rho v_i)}{\partial t} + \frac{\partial \Pi_{1i}}{\partial x} = 0, \qquad (i = 1, 2, 3), \tag{3.111}$$

com $\chi \to \rho v_i$ e, de (2.194):

$$\mathcal{F} \to \Pi_{1i} = \left(p + \frac{B^2}{2\mu_0}\right)\delta_{1i} + \rho v_x v_i - \frac{1}{\mu_0} B_x B_i,$$

cuja condição de salto é

$$[\![\Pi_{1i}]\!] = 0. \tag{3.112}$$

Começando por $i = 1$, temos

$$\Pi_{11} = p + \rho v_x^2 + \frac{1}{\mu_0}\left(-B_x^2 + B_y^2\right). \tag{3.113}$$

de modo que (3.112) nos fornece a condição de salto

$$\left[\!\!\left[p + \rho v_x^2 + \frac{B_y^2}{\mu_0}\right]\!\!\right] = 0 \tag{3.114}$$

onde usamos (3.110). Analogamente, para $i = 2$ teremos

$$\left[\!\!\left[\rho v_x v_y - \frac{B_x B_y}{\mu_0}\right]\!\!\right] = 0, \tag{3.115}$$

ao passo que $i = 3$ resulta numa identidade trivial.

3.8.4 Conservação da energia

A equação de conservação de energia (2.222), em uma dimensão, é

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\rho v^2}{2} + \frac{p}{\gamma - 1} + \frac{B^2}{2\mu_0}\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{\gamma}{\gamma - 1} p v_x + \rho \frac{v_x v^2}{2} + \frac{1}{\mu_0}[\mathbf{B} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B})]_x\right\} = 0. \tag{3.116}$$

de modo que

$$\chi \to \frac{\rho v^2}{2} + \frac{p}{\gamma - 1} + \frac{B^2}{2\mu_0}, \qquad \mathcal{F} \to \frac{\gamma}{\gamma - 1} p v_x + \rho \frac{v_x v^2}{2} + \frac{B_y}{\mu_0}(v_x B_y - v_y B_x),$$

e a condição de salto é

$$\left[\!\!\left[\frac{\gamma}{\gamma - 1} p v_x + \rho \frac{v_x v^2}{2} + \frac{B_y}{\mu_0}(v_x B_y - v_y B_x)\right]\!\!\right] = 0 \tag{3.117}$$

3.8.5 Conservação do fluxo magnético

Escrevemos, em uma dimensão, a equação (3.109) que representa a conservação do fluxo magnético:

$$\frac{\partial B_x}{\partial t} + [\nabla \cdot (\mathbf{vB} - \mathbf{Bv})]_x = 0. \tag{3.118}$$

onde

$$[\nabla \cdot (\mathbf{vB} - \mathbf{Bv})]_x = -[\nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B})]_x =$$
$$= \hat{e}_x \frac{\partial}{\partial y}(v_x B_y - v_y B_x) - \hat{e}_y \frac{\partial}{\partial x}(v_x B_y - v_y B_x)$$

de modo que reescrevemos a equação (3.118) na forma da equação geral de conservação:

$$\frac{\partial B_x}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial y}(v_x B_y - v_y B_x) = 0, \tag{3.119}$$

tal que $\chi \to B_x$ e $\mathcal{F} \to v_y B_x - v_x B_y$. Assim, a condição de salto correspondente é

$$[\![v_y B_x - v_x B_y]\!] = 0. \tag{3.120}$$

3.9 Ondas de choque magnetohidrodinâmicas

Há vários tipos de superfícies de descontinuidade em magnetohidrodinâmica, com interesse em várias áreas como astrofísica de plasmas. Um estudo detalhado destas descontinuidades pode ser encontrado em [16]. Outros livros, como [11], exploram de forma mais aprofundada as aplicações de descontinuidades MHD em plasmas espaciais. Neste trabalho vamos nos limitar ao estudo de um importante tipo de descontinuidade, que são as ondas de choque. Ondas de choque são tipos particulares de superfícies de descontinuidade, através das quais há um fluxo de massa ($j \neq 0$) e a densidade é descontínua. Já a componente normal do campo magnético pode ou não ser nula.

As condições de salto da seção anterior que são aplicáveis ao caso de ondas de choque são, portanto:

$$[\![\rho v_x]\!] = 0, \tag{3.121}$$
$$[\![B_x]\!] = 0, \tag{3.122}$$
$$\left[\!\!\left[\rho v_x^2 + p + \frac{B_y^2}{2\mu_0} \right]\!\!\right] = 0, \tag{3.123}$$
$$\left[\!\!\left[\rho v_x v_y - \frac{1}{\mu_0} B_x B_z \right]\!\!\right] = 0, \tag{3.124}$$
$$\left[\!\!\left[\frac{\gamma}{\gamma - 1} p v_x + \frac{1}{2}\rho v^2 v_x + \frac{1}{\mu_0} B_y (v_x B_y - v_y B_x) \right]\!\!\right] = 0, \tag{3.125}$$
$$[\![v_y B_x - v_x B_y]\!] = 0. \tag{3.126}$$

Classicamente estudamos as ondas de choque MHD distinguindo três casos: choques paralelos, perpendiculares e oblíquos, quando o ângulo que $\mathbf{B}_-$ faz com a normal à superfície do choque é igual a zero, $\pi/2$ ou entre estes valores, respectivamente.

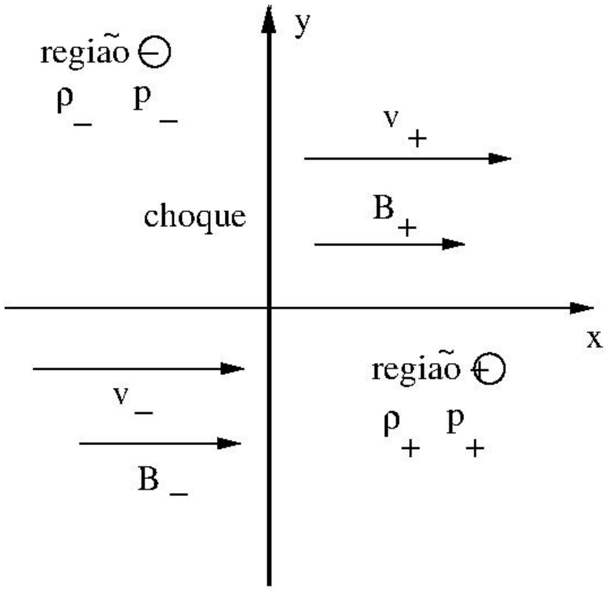

Figura 3.6: Grandezas em ambos os lados de um choque paralelo.

3.9.1 Choques paralelos

São tais que as velocidades e os campos magnéticos à esquerda e à direita da frente de choque, $\mathbf{v}_\pm$ e $\mathbf{B}_\pm$, são ambas perpendiculares à superfície de descontinuidade, de modo que podemos escolher [Fig. 3.6] [24]

$$\mathbf{v}_\pm = (v_\pm, 0, 0), \qquad \mathbf{B}_\pm = (B_\pm, 0, 0).$$

Aplicando as condições de salto (3.121), (3.122), (5.69) e (5.85) obtemos, na sequência

$$\rho_+ v_+ = \rho_- v_-, \tag{3.127}$$
$$B_+ = B_-, \tag{3.128}$$
$$\rho_+ v_+^2 + p_+ = \rho_- v_-^2 + p, \tag{3.129}$$
$$\frac{\gamma}{\gamma-1} p_+ v_+ + \frac{1}{2}\rho_+ v_+^3 = \frac{\gamma}{\gamma-1} p_- v_- + \frac{1}{2}\rho_- v_-^3, \tag{3.130}$$

ao passo que (3.126) é satisfeita identicamente. Observe que o campo magnético é o mesmo antes e depois da frente do choque, e que as demais equações não contém o campo magnético. Isso significa que choques paralelos são essencialmente os mesmos que se estudam na hidrodinâmica (sem campo magnético).

As velocidades do som antes e depois do choque são dadas por

$$v_{S\pm}^2 = \frac{\gamma p_\pm}{\rho_\pm}, \tag{3.131}$$

de forma que os números de Mach correspondentes serão

$$\mathcal{M}_\pm = \frac{v_\pm}{v_{S\pm}}. \tag{3.132}$$

Além disso é conveniente definir as duas razões

$$r = \frac{\rho_+}{\rho_-}, \qquad R = \frac{p_+}{p_-}, \tag{3.133}$$

de modo que (A.42) resulta em

$$v_+ = r^{-1} v_-, \tag{3.134}$$

ao passo que (A.44) nos leva a

$$R = 1 - \gamma(r^{-1} - 1)\mathcal{M}_-^2, \tag{3.135}$$

e (3.130) nos faz recair numa equação do segundo grau,

$$-(\gamma+1)r^{-2}\mathcal{M}_-^2 + 2(1+\gamma\mathcal{M}_-^2)r^{-1} - (\gamma-1)\mathcal{M}_-^2 - 2 = 0. \tag{3.136}$$

Há duas raízes desta equação: uma delas, $r = 1$, não tem muito interesse pois não descreve uma descontinuidade da densidade ($\rho_+ = \rho_-$), de modo que nos interessará apenas a outra raiz, que é

$$r = \frac{\mathcal{M}_-^2(\gamma+1)}{2+(\gamma-1)\mathcal{M}_-^2}, \tag{3.137}$$

a qual, inserida em (3.135), fornece a razão entre as pressões à frente e atrás do choque:

$$R = 1 - \frac{2\gamma}{\gamma+1}(1-\mathcal{M}_-^2). \tag{3.138}$$

Isolando M_- em (3.137) e substuindo em (3.135) obtemos uma relação muito útil entre R e r, a saber

$$R = \frac{(\gamma+1)r-(\gamma-1)}{(\gamma+1)-(\gamma-1)r}. \tag{3.139}$$

Se $\mathcal{M}_- = 1$, ou seja, se $v_- = v_{S-}$, a eq. (3.137) indica que $r = 1$, ou seja, não há uma onda de choque. Como as pressões sempre são positivas, impomos que $R > 0$. Se $\mathcal{M}_- \neq 1$, para que esta condição seja satisfeita a relação (3.139) impõe que $r \geq (\gamma-1)/(\gamma+1)$. Já no limite onde $\mathcal{M}_- \to \infty$ temos que $r \to (\gamma+1)/(\gamma-1)$, enquanto R vai ao infinito. Assim chegamos às duas relações clássicas para ondas de choque

$$\frac{\gamma-1}{\gamma+1} \leq r \leq \frac{\gamma+1}{\gamma-1}, \qquad 0 \leq R < \infty, \tag{3.140}$$

sendo que o valor mínimo de $\mathcal{M}_-^2$ é $(\gamma-1)/2\gamma$, não havendo obviamente valor máximo finito.

Na Fig. 3.7(a) mostramos o gráfico de r em função de $\mathcal{M}_-$ para um plasma com $\gamma = 5/3$, no qual o valor mínimo de r é $1/4$ (para um número de Mach $1/\sqrt{5}$ e o valor de r tende para 4 quando $\mathcal{M}_- \to \infty$. As variações de R com $\mathcal{M}_-$ e r são mostradas nas Figuras 3.7(b) e (c), respectivamente. É interessante observar que, na medida em que r tende a um valor finito mas R não, para uma onda de choque muito forte ($\mathcal{M}_- \to \infty$) temos que ρ_+ nunca pode ser superior a $4\rho_-$. No entanto, como $R \to \infty$ nesse limite, a pressão cresce indefinidamente. Isto só é possível se houver um grande salto na temperatura do plasma através do choque.

Usando a equação de estado dos gases perfeitos ($p = \rho k_B T$) obtemos a razão entre as temperaturas em ambos os lados do choque:

$$\frac{T_+}{T_-} = \frac{R}{r} = \frac{2\gamma(\gamma-1)\mathcal{M}_-^4 + (-\gamma^2+6\gamma-1)\mathcal{M}_-^2 - 2(\gamma-1)}{\mathcal{M}_-^2(\gamma+1)^2}. \tag{3.141}$$

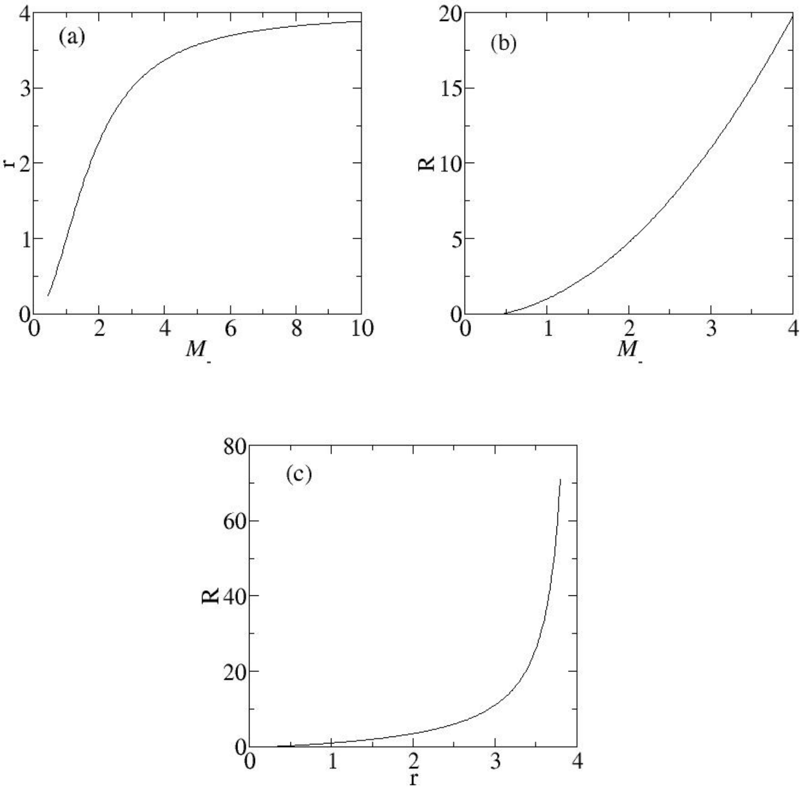

Figura 3.7: (a) Razão entre as densidades *versus* número de Mach antes da frente de choque para $\gamma = 5/3$; (b) Razão entre as pressões *versus* número de Mach; (c) Razão entre as pressões *versus* razão entre as densidades.

Para um choque forte ($\mathcal{M}_- \gg 1$) o termo dominante da expressão acima é

$$\frac{T_+}{T_-} \approx \frac{2\gamma(\gamma-1)\mathcal{M}_-^2}{(\gamma+1)^2} \gg 1, \tag{3.142}$$

de modo que um choque paralelo muito forte é associado a um intenso aquecimento do plasma.

Como $r = \rho_+/\rho_-$, um choque com $r > 1$ é compressivo, pois a pressão à frente do choque é maior do que atrás, ao passo que um choque com $r < 1$ representa uma onda de rarefação. Pela análise que fizemos até agora, com o auxílio das leis de conservação, descrevemos situações onde $r < 1$ e $r > 1$, No entanto, ainda é necessário considerar a segunda lei da Termodinâmica, pela qual a entropia de um sistema fechado pode crescer espontaneamente, mas nunca diminuir espontaneamente. Cumpre destacar que as ondas de choque não representam processos adiabáticos, de modo que a variação da entropia não é nula. Assim, pela segunda lei da Termodinâmica, a propagação de uma onda de choque deve provocar um crescimento na entropia do plasma, ou seja, deve haver um salto positivo da entropia através da frente de choque:

$$[\![s]\!] = s_+ - s_- > 0 \tag{3.143}$$

Usando (2.133) para a entropia de um gás perfeito, e considerando $S_0 = 0$, a entropia específica (por unidade de massa) será

$$s = c_v \mathcal{R} \ln\left(p\rho^{-\gamma}\right), \tag{3.144}$$

pois $V = 1/\rho$ é o volume específico, c_v é a capacidade térmica a volume constante e $\mathcal{R}$ é a constante universal dos gases. Substituindo (3.144) em (3.143) obtemos

$$[\![s]\!] = c_v \mathcal{R}(\ln R - \gamma \ln r), \tag{3.145}$$

que, derivada em relação à r, fornece a relação [24]

$$r\frac{d}{dr}[\![s]\!] = c_v \mathcal{R}\left(\frac{r}{R}\frac{dR}{dr} - \gamma\right). \tag{3.146}$$

Se $r = 1$, então $R = 1$ e $[\![s]\!] = 0$, o que já seria esperado pois, não havendo choque não haverá salto na entropia. Para valores de r dentro do intervalo $(\gamma-1)/(\gamma+1) < r < (\gamma+1)/(\gamma-1)$ o salto da entropia é dado, usando (3.139), pela integral

$$[\![s]\!] = c_v \mathcal{R}\gamma(\gamma^2-1)\int_1 \frac{dr\,(r-1)^2}{r[(\gamma+1)r-(\gamma-1)][(\gamma+1)-(\gamma-1)r]}. \tag{3.147}$$

Calculando numericamente o valor da integral acima obtemos o gráfico mostrado na Fig. 3.8(a), no qual observamos que $[\![s]\!] > 0$ se $r > 1$, ou seja, se o choque for compressivo. Dito de outra forma, a segunda lei da Termodinâmica veda a existência de choques de rarefação.

Outra conclusão importante que podemos tirar a partir dos resultados obtidos aqui diz respeito ao número de Mach à frente do choque. A razão entre os números de Mach é dada por

$$\frac{\mathcal{M}_+^2}{\mathcal{M}_-^2} = \frac{1}{Rr}, \tag{3.148}$$

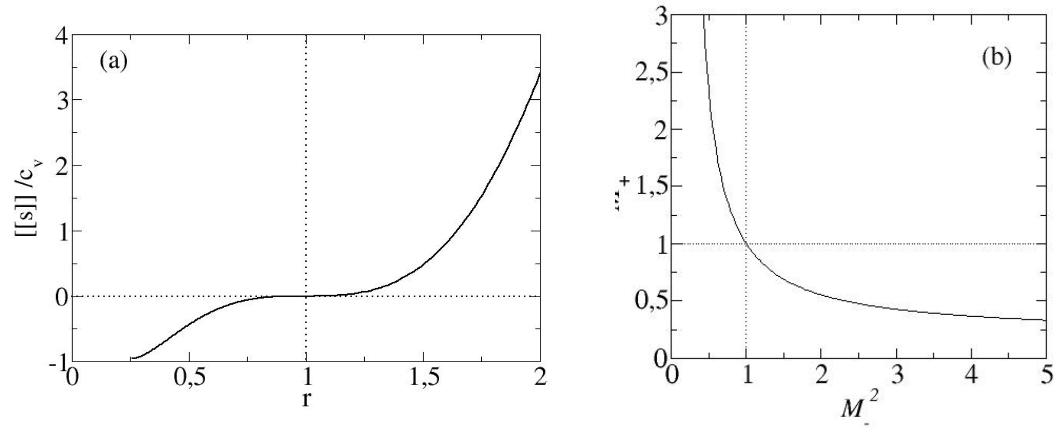

Figura 3.8: (a) Salto da entropia devido a uma onda de choque em função da razão entre as densidades, para $\gamma = 5/3$; (b) Relação entre os números de Mach atrás e à frente da superfície de descontinuidade.

de modo que, usando (3.137) e (3.138) obtemos

$$\mathcal{M}_+^2 = \frac{2 + (\gamma - 1)\mathcal{M}_-^2}{1 - \gamma + 2\gamma\mathcal{M}_-^2} \tag{3.149}$$

cujo gráfico é mostrado na Fig. 3.8(b), onde vemos que, se $\mathcal{M}_- > 1$ então $\mathcal{M}_+ < 1$. Isto significa que há, através da frente de choque, uma transição abrupta de um fluxo supersônico para um fluxo subsônico, que é irreversível em vista do aumento da entropia.

3.9.2 Choques perpendiculares

Neste caso as velocidades à frente e atrás da frente de choque, $\mathbf{v}_\pm$, continuam perpendiculares à superfície de descontinuidade, mas os campos magnéticos são perpendiculares às velocidades, de modo que escolhemos

$$\mathbf{v}_\pm = (v_\pm, 0, 0), \qquad \mathbf{B}_\pm = (0, B_\pm, 0).$$

As condições de salto (3.121), (5.69), (5.85) e (3.126) resultam em

$$\rho_+ v_+ = \rho_- v_-, \tag{3.150}$$

$$\rho_+ v_+^2 + p_+ + \frac{B_+^2}{2\mu_0} = \rho_- v_-^2 + p_+ \frac{B_-^2}{2\mu_0}, \tag{3.151}$$

$$\frac{\gamma}{\gamma - 1} p_+ v_+ + \frac{1}{2}\rho_+ v_+^3 + \frac{1}{\mu_0} v_+ B_+^2 = \frac{\gamma}{\gamma - 1} p_- v_- + \frac{1}{2}\rho_- v_-^3 + \frac{1}{\mu_0} v_- B_-^2, \tag{3.152}$$

$$v_+ B_+ = v_- B_-, \tag{3.153}$$

sendo que (3.122) e (5.72) são satisfeitas identicamente.

Estas equações podem ser reescritas com base nas quantidades adimensionais introduzidas na subseção precedente: r, R, $\mathcal{M}_\pm$ e ainda o beta do plasma, definido no

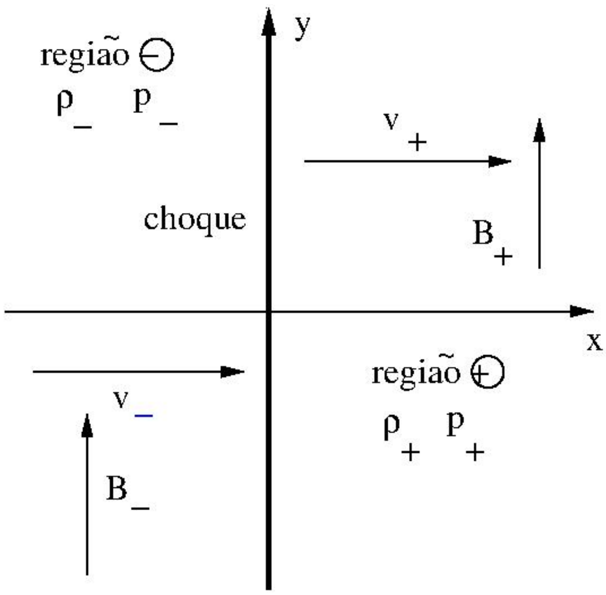

Figura 3.9: Grandezas em ambos os lados de um choque perpendicular.

início deste capítulo como a razão entre a pressão cinética e a pressão magnética:

$$\beta_{\pm} = \frac{p_{\pm}}{B_{\pm}^2/2\mu_0}. \tag{3.154}$$

Teremos, pois, que (5.106)-(3.153) produzem o conjunto de relações

$$v_+ = r^{-1} v_- \tag{3.155}$$

$$B_+ = rB_-, \tag{3.156}$$

$$\gamma \mathcal{M}_-^2 (r^{-1} - 1) + (R - 1) + \beta_-^{-1}(r^2 - 1) = 0, \tag{3.157}$$

$$\frac{1}{2}\gamma \mathcal{M}_-^2 (r^{-2} - 1) + \frac{\gamma}{\gamma - 1}(r^{-1}R - 1) + 2\beta_-^{-1}(r - 1) = 0. \tag{3.158}$$

De (3.157) obtemos uma expressão para a razão entre as pressões à frente e atrás do choque

$$R = 1 + \gamma \mathcal{M}_-^2 (1 - r^{-1}) + \beta_-^{-1}(1 - r^2), \tag{3.159}$$

a qual, substituida em (5.107), nos conduz a uma equação do terceiro grau para r:

$$ar^3 + br^2 + cr + d = 0, \tag{3.160}$$

onde os coeficientes são

$$a = \beta_-^{-1}\left(\frac{\gamma - 2}{\gamma - 1}\right), \tag{3.161}$$

$$b = -\frac{1}{2}\gamma \mathcal{M}_-^2 - \frac{\gamma}{\gamma - 1} - 2\beta_-^{-1}, \tag{3.162}$$

$$c = \frac{\gamma}{\gamma - 1}(1 + \gamma \mathcal{M}_-^2 + \beta_-^{-1}), \tag{3.163}$$

$$d = \mathcal{M}_-^2 \frac{\gamma(\gamma + 1)}{2(1 - \gamma)}. \tag{3.164}$$

A equação (3.160) tem três raizes, sendo que uma delas é $r = 1$, como no caso anterior, e que não corresponde de fato a uma onda de choque. Isto nos permite fatorar o lado esquerdo de (3.160) como

$$(r-1)F(r) = 0 \tag{3.165}$$

onde $F(r) = \mathcal{A}r^2 + \mathcal{B}r + \mathcal{C}$, com

$$\mathcal{A} = 2(2-\gamma), \tag{3.166}$$

$$\mathcal{B} = 2\gamma(\beta_- + 1) + \gamma\beta_-(\gamma - 1)\mathcal{M}_-^2, \tag{3.167}$$

$$\mathcal{C} = -\beta_-\gamma(\gamma+1)\mathcal{M}_-^2. \tag{3.168}$$

Os valores possíveis de r correspondem às duas raízes de $F(r)$, que denotamos por r_1 e r_2. Das relações de Girard [23]

$$r_a r_2 = \frac{\mathcal{C}}{\mathcal{A}} = -\frac{\gamma(\gamma+1)\beta_-\mathcal{M}_-^2}{2(2-\gamma)}. \tag{3.169}$$

Se $\gamma > 2$ (o que certamente é o caso para $\gamma = 5/3$) então $r_1 r_2 < 0$: uma das raízes será negativa, e a outra positiva. A raiz negativa não tem significado físico, então só existirá uma raiz positiva correspondente a uma onda de choque. Além disso, como $F(0) = \mathcal{C} < 0$ e $F((\gamma+1)/(\gamma-1)) > 0$, pelo teorema do valor médio, esta raiz deverá estar necessariamente no intervalo $0 < r < (\gamma+1)/(\gamma-1)$.

Usando uma análise similar à que fizemos anteriormente para os choques paralelos, pode-se mostrar que a segunda lei da Termodinâmica também exige que $r > 1$ para um salto positivo na entropia. Neste caso $F(1) < 0$. Como $F(1) = \mathcal{A} + \mathcal{B} + \mathcal{C}$, temos que

$$\mathcal{M}_-^2 > 1 + \frac{2}{\gamma\beta_-}. \tag{3.170}$$

Considerando a velocidade de Alfvén antes do choque

$$v_{A-}^2 = \frac{B_-^2}{\mu_0\rho_-}, \tag{3.171}$$

e usando também (3.99) temos que a velocidade da onda magnetosônica correspondente é $v_{MS-}^2 = v_{S-}^2 + v_{A-}^2$. Substituindo (3.132) e (3.154) concluimos que $v_- > v_{MS-}$ ou seja, a velocidade do plasma atrás do choque deve ser maior do que a velocidade da onda magnetosônica rápida propagando-se perpendicularmente ao campo magnético. Analogamente pode-se mostrar que $v_+ < v_{SM+}$ para a região à frente do choque.

3.9.3 Choques oblíquos

Neste caso as velocidades e os campos em ambos os lados da frente de choque têm componentes normais e tangenciais à superfície de descontinuidade, então selecionamos

$$\mathbf{v}_\pm = (v_{x\pm}, v_{y\pm}, 0), \qquad \mathbf{B}_\pm = (B_{x\pm}, B_{y\pm}, 0).$$

Para choque oblíquos é mais conveniente usar, ao invés do referencial da frente de choque, o chamado referencial de Hoffmann-Teller [24], que move-se com a velocidade local da deriva $\mathbf{E}\times\mathbf{B}$ do plasma dada, na parte de trás do choque, por (1.82):

$$\mathbf{v}_{E-} = \frac{\mathbf{E}_- \times \mathbf{B}_-}{B_-^2} = \frac{\mathbf{B}_- \times (\mathbf{v}_- \times \mathbf{B}_-)}{B_-^2} \tag{3.172}$$

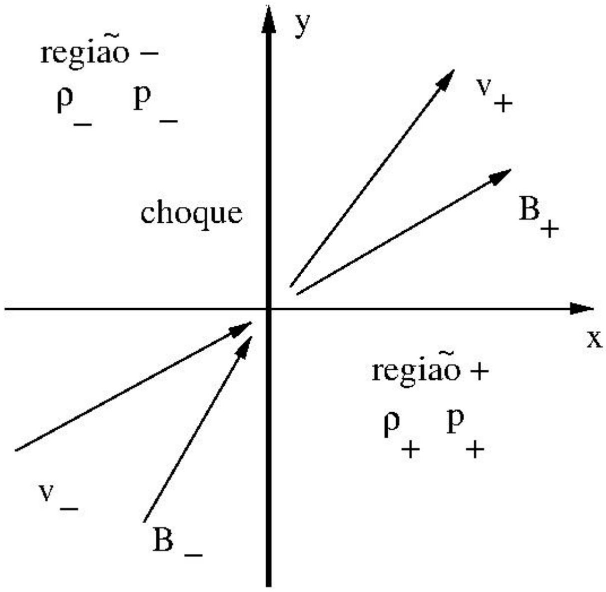

Figura 3.10: Grandezas em ambos os lados de um choque oblíquo.

onde também usamos a lei de Ohm generalizada (4.4).

O referencial de Hoffmann-Teller é tal que $|\mathbf{v}_{E-}| = 0$, ou seja

$$|\mathbf{v}_- \times \mathbf{B}_-| = v_{x-}B_{y-} - v_{y-}B_{x-} = 0. \tag{3.173}$$

Substituindo esta relação na condição de salto (3.126) obtemos

$$v_{x+}B_{y+} - v_{y+}B_{x+} = 0, \tag{3.174}$$

donde $|\mathbf{v}_+ \times \mathbf{B}_+| = 0$. Logo, no referencial de Hoffmann-Teller a velocidade do plasma é paralela ao campo magnético, tanto à frente como atrás do choque. Assim

$$v_{x-} = v_- \cos\theta_- \equiv u, \qquad v_{y-} = v_- \sin\theta_-, \tag{3.175}$$

$$B_{x-} = B_- \cos\theta_-, \qquad B_{y-} = B_- \sin\theta_-. \tag{3.176}$$

As condições de salto (3.121), (3.122), (5.69), (5.72), (5.85) e (3.126) dão

$$\rho_+ v_{x+} = \rho_- v_{x-}, \tag{3.177}$$

$$B_{x+} = B_{y-}, \tag{3.178}$$

$$\rho_+ v_+^2 + p_+ + \frac{B_{y+}^2}{2\mu_0} = \rho_- v_-^2 + p_+ \frac{B_{y-}^2}{2\mu_0}, \tag{3.179}$$

$$\rho_+ v_{x+} v_{y+} - \frac{1}{\mu_0} B_{x+} B_{y+} = \rho_- v_{x-} v_{y-} - \frac{1}{\mu_0} B_{x-} B_{y-}, \tag{3.180}$$

$$\frac{\gamma}{\gamma - 1} p_+ v_{x+} + \frac{1}{2} \rho_+ v_+^2 v_{x+} = \frac{\gamma}{\gamma - 1} p_- v_{x-} + \frac{1}{2} \rho_- v_-^2 v_{x-}. \tag{3.181}$$

Além das razões entre as densidades (r) e as pressões (R) é conveniente introduzir as seguintes razões

$$q = \frac{v_{y+}}{v_{y-}}, \qquad Q = \frac{B_{y+}}{B_{y-}}, \tag{3.182}$$

de modo que (3.177)-(3.181) levam-nos a $v_{x+} = r^{-1} v_{x-}$ e ao conjunto de equações algébricas

$$(r^{-1}-1)u_-^2 + (R-1)\,\frac{v_{S-}^2}{\gamma} + \frac{1}{2}\,(Q^2-1)v_{A-}^2 = 0, \tag{3.183}$$

$$(q-1)u_-^2 - (Q-1)v_{A-}^2\cos^2\theta_- = 0, \tag{3.184}$$

$$\frac{1}{2}\left[(r^{-1}-1)\cos^2\theta_- + (q^2-1)\sin^2\theta_-\right]\frac{u_-^2}{\cos^2\theta_-} - \frac{v_{S-}^2}{\gamma-1}\,(1-Rr^{-1}) = 0, \tag{3.185}$$

cuja solução é

$$q = \frac{u_-^2 - \cos^2\theta_- v_{A-}^2}{u_-^2 - r\cos^2\theta_- v_{A-}^2}, \tag{3.186}$$

$$Q = rq, \tag{3.187}$$

$$R = 1 + \frac{\gamma u_-^2\,(r-1)}{v_{S-}^2 r}\left\{1 - \frac{rv_{A-}^2\left[(r+1)u_-^2 - 2rv_{A-}^2\cos^2\theta_-\right]}{2(u_-^2 - rv_{A-}^2\cos^2\theta_-)^2}\right\}. \tag{3.188}$$

Substituindo (3.186) e (3.187) em (3.188) obtemos a relação

$$\begin{aligned}&(u_-^2 - r\cos^2\theta_- v_{A-}^2)^2\left\{[(\gamma+1)-(\gamma-1)r]\,u_-^2 - 2rv_{S-}^2\right\} - \\ &- r\sin^2\theta_- u_-^2 V_{A-}^2\left\{[\gamma+(2-\gamma)r]\,u_-^2 - [(\gamma+1)-(\gamma-1)r]\,r\cos^2\theta_- v_{A-}^2\right\} = 0,\end{aligned} \tag{3.189}$$

que é chamada adiabática de choque de Hugoniot [24].

Capítulo 4

Equilíbrio MHD

4.1 Magnetohidrostática

Na MHD um estado de equilíbrio é caracterizado por não haver dependência explícita com o tempo nas quantidades físicas, ou seja, $\partial/\partial t = 0$ no conjunto reduzido de equações da MHD (8.1)-(8.6), que fica neste caso:

$$\nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0, \tag{4.1}$$
$$\rho(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} = -\nabla p + \mathbf{J} \times \mathbf{B} - \rho \Delta \Phi, \tag{4.2}$$
$$(\mathbf{v} \cdot \nabla)\left(p\rho^{-\gamma}\right) = 0, \tag{4.3}$$
$$\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B} = \eta \mathbf{J}, \tag{4.4}$$
$$\nabla \times \mathbf{E} = 0 \tag{4.5}$$
$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}. \tag{4.6}$$

Este tipo de equilíbrio é compatível com fluxos onde a velocidade é constante, como por exemplo rotação de plasma, o que será visto num capítulo posterior. Vamos inicialmente considerar o caso mais simples, e não menos importante, onde a velocidade do plasma é nula, o que caracteriza o chamado equilíbrio MHD estático, cujas equações são:

$$\nabla p = \mathbf{J} \times \mathbf{B} - \rho \nabla \Phi, \tag{4.7}$$
$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}, \tag{4.8}$$
$$\mathbf{E} = \eta \mathbf{J}, \tag{4.9}$$
$$\nabla \times \mathbf{E} = 0. \tag{4.10}$$

Na ausência de resistividade (MHD ideal) temos $\eta = 0$ e, portanto, $\mathbf{E} = \mathbf{0}$. Adicionamos, aqui, a lei de Gauss magnética por completeza do conjunto de equações que descrevem a magnetohidrostática. A equação (8.12) tem uma interpretação bastante simples: a pressão cinética do plasma, que tende a fazê-lo se expandir, é contrabalançada pela ação conjunta das forças magnética e gravitacional. Portanto, o conjunto de equações que descrevem um equilíbrio MHD estático é:

$$\nabla p = \mathbf{J} \times \mathbf{B} - \rho \nabla \Phi, \tag{4.11}$$
$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}, \tag{4.12}$$
$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0. \tag{4.13}$$

4.2 Plasma num campo gravitacional

O equilíbrio MHD de plasmas sob a ação de campos gravitacionais tem um interesse imediato em situações astrofísicas. Este é o caso de um plasma sujeito a um campo gravitacional externo, ou seja, que não é gerado pelo plasma em si.

4.2.1 Campo uniforme

Por simplicidade, consideraremos que o campo gravitacional é uniforme e que não há corrente elétrica associada ao plasma ($\mathbf{J} = \mathbf{0}$. Esta situação aplica-se às imediações da superfície de uma estrela, supondo ainda um campo magnético uniforme na mesma direção do campo gravitacional: $\nabla\Phi = -\mathbf{g} = g\mathbf{e}_z$, com $\mathbf{B} = B_0\mathbf{e}_z$. A equação de equilíbrio de forças (4.11) nos conduz a

$$\frac{dp}{dz} = -\rho(z)g, \tag{4.14}$$

onde supomos que tanto a pressão como a densidade do plasma sejam funções apenas da coordenada z. Usando a equação de estado dos gases ideais (2.125) obtemos

$$\frac{dp}{dz} = -\frac{p(z)}{H}, \tag{4.15}$$

onde definimos o comprimento característico

$$H(z) = \frac{k_B T(z)}{m_i g}. \tag{4.16}$$

A equação (4.15) pode ser imediatamente integrada fornecendo

$$p(z) = p(0)\exp\left(-\int_0^z \frac{dz}{H(z)}\right), \tag{4.17}$$

onde $z = 0$ é um dado nível de referência. Para uma atmosfera isotérmica T não depende de z, de modo que resulta a fórmula barométrica

$$p(z) = p(0)e^{-z/H}, \tag{4.18}$$

a qual, devido à equação de estado, resulta numa dependência similar para a densidade do plasma

$$\rho(z) = \rho(0)e^{-z/H}, \tag{4.19}$$

Como um exemplo, a Corona Solar tem uma temperatura da ordem de $10^6 K$. Considerando que a aceleração gravitacional na superfície do Sol é da ordem de $274 m/s^2$, e supondo um plasma de Hidrogênio, o comprimento característico é da ordem de 30.000 km, um valor é compatível com a dimensão típica dos arcos coronais.

4.2.2 Campo esfericamente simétrico

Podemos estender o cálculo anterior para uma situação mais realística, onde o campo gravitacional de uma estrela é esfericamente simétrico. Sendo M a massa do Sol, R seu raio médio, e G a constante gravitacional, o campo para pontos onde $r > R$ é dado pela expressão conhecida

$$g(r) = \frac{GM}{r^2} = g_0\left(\frac{R}{r}\right)^2, \tag{4.20}$$

onde $g_0 = GM/R^2$ é a aceleração gravitacional na superfície.

Por completeza, também consideramos o campo magnético esfericamente simétrico

$$\mathbf{B} = B_0\left(\frac{R}{r}\right)^2 \mathbf{e}_r. \tag{4.21}$$

No entanto, na ausência de corrente, a força de Lorentz continua sendo nula, e podemos empregar a relação (4.14) no equilíbrio magnetostático

$$\frac{dp}{dr} = -\rho(r)g(r). \tag{4.22}$$

Usando, novamente, (2.125), a equação acima leva a

$$\frac{d\rho}{dr} = -\frac{\rho}{\Lambda}\left(\frac{R}{r}\right)^2, \tag{4.23}$$

onde o comprimento característico é

$$\Lambda = \frac{k_B T}{m_i g_0}, \tag{4.24}$$

considerando a atmosfera isotérmica, como anteriormente. Integrando (4.23) de R até r, obtemos

$$\rho(r) = \rho_0 \exp\left[\frac{R}{\Lambda}\left(\frac{R}{r} - 1\right)\right], \tag{4.25}$$

onde ρ_0 é a densidade na superfície ($r = R$).

Observe que a solução (4.25) fornece uma densidade infinita se $r \to \infty$, o que é naturalmente impossível. Portanto só podemos aplicar este perfil para distâncias abaixo de alguns raios Solares. Neste intervalo, o resultado teórico está de acordo com resultados experimentais. Para distâncias maiores da superfície, este modelo magnetostático não se aplica, pois há fluxos de plasma como o vento Solar.

4.3 Teorema do virial

Um resultado geral importante no estudo do confinamento magnético de plasmas descritos pelas equações do equilíbrio MHD ideal é o teorema do virial: qualquer equilíbrio MHD ideal para o confinamento deve ser amparado por correntes elétricas externas ao plasma. Não é possível criar uma configuração de equilíbrio MHD ideal confinada apenas por correntes fluindo no interior do plasma [19]. Para demonstrar este resultado, partimos da equação de conservação de momentum linear (2.193), escrita na forma de uma lei de conservação. No caso de equilíbrio estático $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ temos

$$\nabla \cdot \mathbf{\Pi} = 0, \tag{4.26}$$

onde o tensor densidade de fluxo de momentum linear é

$$\Pi_{ij} = \left(p + \frac{B^2}{2\mu_0}\right)\delta_{ij} - \frac{1}{\mu_0}B_iB_j. \tag{4.27}$$

Definindo pressões nas direções perpendicular e paralela ao campo magnético

$$p_\perp = p + \frac{B^2}{2\mu_0}, \tag{4.28}$$

$$p_\parallel = p - \frac{B^2}{2\mu_0}, \tag{4.29}$$

podemos reescrever (4.27) como

$$\Pi_{ij} = p_\perp\left(\delta_{ij} - b_ib_j\right) + p_\parallel b_ib_j, \tag{4.30}$$

onde $\hat{\mathbf{b}} = \mathbf{B}/B$ é um vetor unitário na direção do campo magnético (3.25). Num sistema de coordenadas retangulares, com $\mathbf{B} = B\hat{\mathbf{e}}_z$, este tensor é

$$(\pi_{ij}) = \begin{pmatrix} p_\perp & 0 & 0 \\ 0 & p_\perp & 0 \\ 0 & 0 & p_\parallel \end{pmatrix}. \tag{4.31}$$

Usando uma identidade do cálculo tensorial

$$\nabla\cdot(\mathbf{r}\cdot\mathbf{\Pi}) = \mathbf{r}\cdot(\nabla\cdot\mathbf{\Pi}) + \mathrm{Tr}\mathbf{\Pi}, \tag{4.32}$$

com (4.26) resulta que o traço do tensor densidade de fluxo de momentum linear é

$$\mathrm{Tr}\,\mathbf{\Pi} = 3p + \frac{B^2}{2\mu_0} = \nabla\cdot(\mathbf{r}\cdot\mathbf{\Pi}). \tag{4.33}$$

Integrando a relação acima num volume V, limitado pela superfície fechada S, temos

$$\int_V d^3r\,\nabla\cdot(\mathbf{r}\cdot\mathbf{\Pi}) = \oint_S da\,(\mathbf{r}\cdot\mathbf{\Pi})\cdot\hat{\mathbf{n}} = \int_V d^3r\left(3p + \frac{B^2}{2\mu_0}\right), \tag{4.34}$$

onde $\hat{\mathbf{n}}$ é um vetor unitário perpendicular a S. Considerando que

$$(\mathbf{r}\cdot\mathbf{\Pi})\cdot\hat{\mathbf{n}} = \left(p + \frac{B^2}{2\mu_0}\right)(\hat{\mathbf{n}}\cdot\mathbf{r}) - \frac{B^2}{\mu_0}(\mathbf{r}\cdot\hat{\mathbf{b}})(\hat{\mathbf{n}}\cdot\hat{\mathbf{b}}), \tag{4.35}$$

a relação (4.34) torna-se

$$\oint_S da\left\{\left(p + \frac{B^2}{2\mu_0}\right)(\hat{\mathbf{n}}\cdot\mathbf{r}) - \frac{B^2}{\mu_0}(\mathbf{r}\cdot\hat{\mathbf{b}})(\hat{\mathbf{n}}\cdot\hat{\mathbf{b}})\right\} = \int_V d^3r\left(3p + \frac{B^2}{2\mu_0}\right). \tag{4.36}$$

Por redução ao absurdo, vamos supor que o teorema do virial é falso: poderia haver confinamento unicamente com a presença de correntes internas, sem correntes externas. Nesse caso, se a superfície S está fora da região contendo o plasma, temos $p(S) = 0$. Assim (4.36) fica

$$\oint_S da\,\frac{B^2}{2\mu_0}\left\{\frac{1}{2}(\hat{\mathbf{n}}\cdot\mathbf{r}) - (\mathbf{r}\cdot\hat{\mathbf{b}})(\hat{\mathbf{n}}\cdot\hat{\mathbf{b}})\right\} = \int_V d^3r\left(3p + \frac{B^2}{2\mu_0}\right). \tag{4.37}$$

Não havendo correntes externas podemos jogar a superfície S para o infinito. Escolhendo $\mathbf{B} = B\hat{\mathbf{e}}_z$ e $\mathbf{r} = r\hat{\mathbf{n}}$ (para r muito grande) o termo entre chaves em (4.37) é

$$r\left(1-\cos^2\theta\right),$$

onde θ é o ângulo entre $\mathbf{r}$ e $\mathbf{B}$. Logo o termo entre chaves é igual a r multiplicado por um número da ordem da unidade, e

$$\oint_S da\, r\frac{B^2}{2\mu_0} \approx \int_V d^3r\left(3p+\frac{B^2}{2\mu_0}\right), \qquad (r \gg 1). \tag{4.38}$$

Se as correntes elétricas responsáveis pelo confinamento estão no interior do plasma, então

$$B(S) \approx \frac{1}{r^3}, \qquad (r \gg 1)$$

de modo que o lado esquerdo de (4.38) fica

$$\oint_S da\, r\frac{1}{r^6} \sim \frac{1}{r^3} \to 0$$

se $r \to \infty$, anulando assim o primeiro membro de (4.38). Como o segundo membro é não-nulo, chegamos uma contradição. Logo a hipótese inicial é falsa, e (4.38) só resulta satisfeita se houver correntes externas ao plasma. Nesse caso a integral de superfície em (4.36) deve ser efetuada quando S é a superfície dos condutores externos.

4.4 Superfícies magnéticas

A mais antiga forma de representação espacial de um campo magnético são as suas linhas de força, que possuem duas propriedades básicas que as definem:

1. em cada ponto da linha de força a direção do vetor $\mathbf{B}$ é tangencial, sendo seu sentido indicado por flechas desenhadas nas próprias linhas de força,

2. a densidade de linhas de força numa pequena região do espaço é proporcional ao módulo do campo magnético naquela região.

Representando por $\boldsymbol{d\ell}$ o elemento de comprimento orientado ao longo de uma linha de força, a primeira propriedade acima implica em que

$$\mathbf{B} \times \boldsymbol{d\ell} = \mathbf{0}. \tag{4.39}$$

Representando o campo magnético em coordenadas cartesianas $\mathbf{B} = (B_x, B_y, B_z)$ resulta que as equações diferenciais das linhas de força podem ser escritas na forma

$$\frac{dx}{B_x} = \frac{dy}{B_y} = \frac{dz}{B_z}. \tag{4.40}$$

Fazendo o produto escalar da equação de equilíbrio de forças (4.11) com $\mathbf{B}$ obtemos

$$\mathbf{B}\cdot\nabla p = 0, \tag{4.41}$$

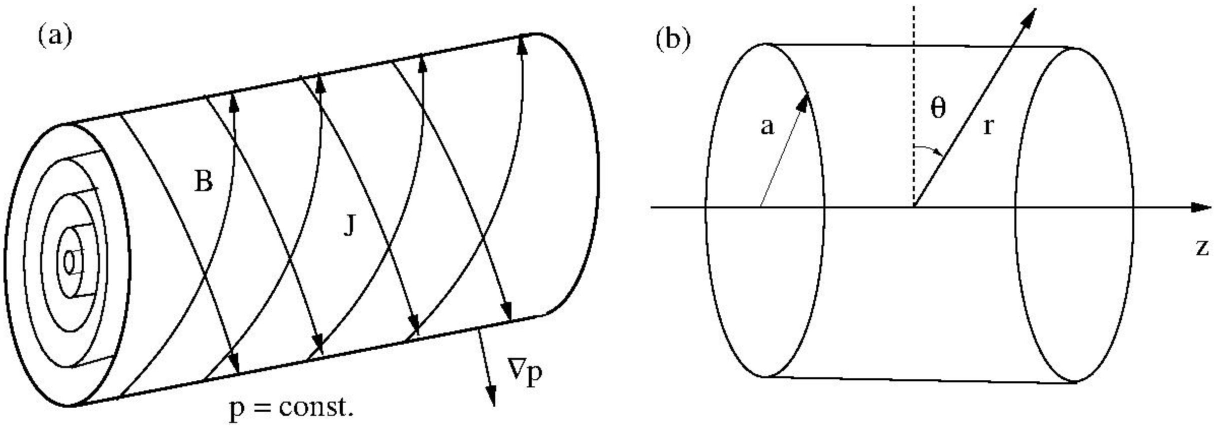

Figura 4.1: (a) Superfícies magnéticas e linhas de campo e de corrente; (b) coluna de plasma cilíndrica.

de modo que as linhas de força do campo magnético devem jazer sobre superfícies de pressão constante, ou isobáricas [Fig. 4.1(a)]. Tais superfícies são também chamadas superfícies de fluxo ou superfícies magnéticas.

As linhas de corrente são definidas de forma análoga às linhas de força: a direção do vetor **J** é tangente à respectiva linha de corrente, com a indicação simbólica do seu sentido. Tomando, agora, o produto interno da equação de equilíbrio (4.11) com **J** segue que as linhas de corrente também jazem sobre as superfícies magnéticas, já que

$$\mathbf{J} \cdot \nabla p = 0. \tag{4.42}$$

O eixo magnético é uma curva correspondente a uma superfície magnética degenerada (associada a um volume nulo). Para superfícies magnéticas abertas (fechadas), o eixo magnético também será uma curva aberta (fechada).

Podemos decompor a densidade de corrente em uma componente paralela ao campo magnético $\mathbf{J}_{\parallel} = \hat{\mathbf{B}}(\hat{\mathbf{B}} \cdot \mathbf{J})$ e uma componente perpendicular ao campo $\mathbf{J}_{\perp} = \mathbf{J} - \mathbf{J}_{\parallel}$. Pré-multiplicando vetorialmente (4.11) por **B** temos que

$$\mathbf{B} \times \nabla p = B^2 \mathbf{J} - (\mathbf{J} \cdot \mathbf{B}) \mathbf{B}, \tag{4.43}$$

de modo que

$$\mathbf{J}_{\perp} = \frac{\mathbf{B} \times \nabla p}{B^2}, \tag{4.44}$$

e que também é denominada "corrente diamagnética". Ela aparece devido à existência do gradiente de pressão no interior da coluna de plasma, e ilustra a modificação provocada pelo plasma no campo magnético usado para confiná-lo. A determinação de superfícies magnéticas, de modo geral, exige que a configuração tenha determinada simetria espacial. Na próxima seção vamos considerar exemplos elementares de equilíbrio MHD que possuem simetria cilíndrica, o que já é suficiente para descrever diversas configurações de interesse. Outras simetrias serão tratadas nos próximos capítulos.

4.5 Equilíbrios MHD com simetria cilíndrica

Uma coluna cilíndrica de plasma pode ser descrita usando um sistema de coordenadas cilíndricas I: (r, θ, z), onde (r, θ) são coordenadas polares num plano $z = const.$, sendo z o eixo de simetria [Fig. 4.1(b)]. As propriedades deste e de outros sistemas de coordenadas de interesse neste livro são apresentadas no Apêndice A.

Vamos supor a existência de um equilíbrio MHD com simetria cilíndrica, no sentido que as quantidades físicas não podem depender nem do ângulo θ (simetria axial) nem do comprimento z (simetria translacional). Portanto, as componentes dos campos magnéticos, da pressão e da densidade de corrente elétrica só podem ser funções da distância radial r. Este é, portanto, um exemplo de equilíbrio MHD unidimensional, onde há apenas uma variável dependente. As equações do equilíbrio MHD assumem formas particularmente simples neste caso.

Usando a expressão do divergente em coordenadas cilíndricas-I [vide Eq. (A.29)] expressamos a lei de Gauss magnética (4.13) como

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rB_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial B_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0, \tag{4.45}$$

donde a componente radial do campo magnético é dada por $B_r = C/r$, onde C é uma constante de integração. No entanto, desejamos qe B_r seja regular na origem, o que só é compatível com a escolha $C = 0$, logo $B_r = 0$ no caso de simetria cilíndrica, de modo que

$$\mathbf{B} = (0, B_\theta(r), B_z(r)). \tag{4.46}$$

Analogamente, tomando a componente radial da lei de Ampère (4.12) obtemos, usando (A.54),

$$J_r = \frac{1}{\mu_0}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial B_z}{\partial \theta} + \frac{\partial B_\theta}{\partial z}\right) = 0. \tag{4.47}$$

Além disso, no caso de simetria cilíndrica o gradiente de pressão deve ter unicamente a componente radial: $\nabla p = (dp/dr)\hat{\mathbf{e}}_r$. A componente radial da equação de equilíbrio (4.11) é

$$\frac{dp}{dr} = J_\theta B_z - J_z B_\theta, \tag{4.48}$$

ao passo que as componentes θ e z da lei de Ampère (4.12) são, respectivamente,

$$-\frac{dB_z}{dr} = -\mu_0 J_\theta, \tag{4.49}$$

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}(rB_\theta) = \mu_0 J_z. \tag{4.50}$$

Eliminando J_θ e J_z de (4.48)-(4.50) chegamos à seguinte relação envolvendo apenas a pressão cinética e as componentes do campo magnético:

$$\frac{d}{dr}\left(\frac{B_\theta^2 + B_z^2}{2\mu_0} + p\right) = -\frac{B_\theta^2(r)}{\mu_0 r}, \tag{4.51}$$

chamada relação de Bennett [25]. Usando o conceito de pressão magnética (3.23) para o campo (4.46), reescrevemos esta relação como

$$\frac{d}{dr}(p + p_m) = -\frac{B_\theta^2(r)}{\mu_0 r}. \tag{4.52}$$

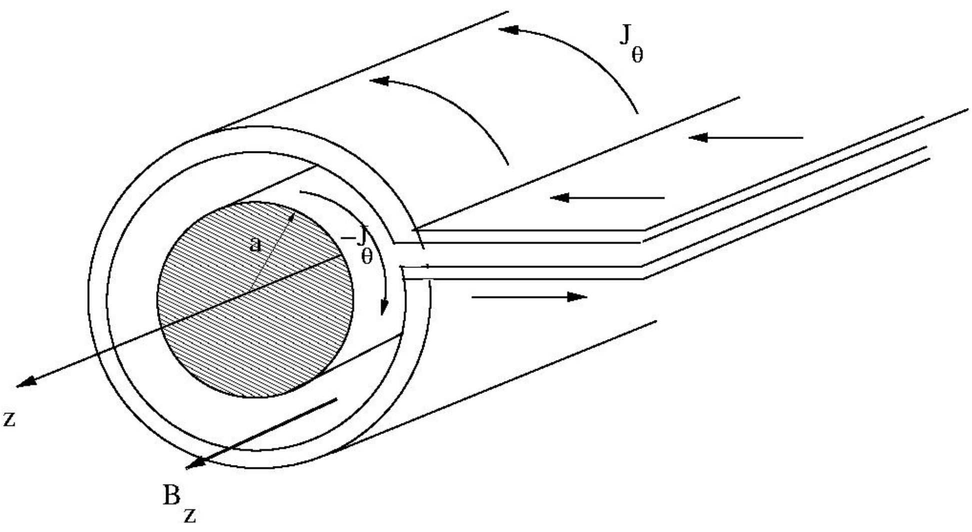

Figura 4.2: Esquema de um *theta-pinch*.

A relação de Bennett é usada adotando-se dois perfis de grandezas de equilíbrio MHD, como $p(r)$ e $B_z(r)$, e escolhendo-se uma condição de contorno, de modo que (4.51) fornece o perfil radial de B_θ. Há algumas configurações magnéticas de interesse, que exibem simetria cilíndrica. Vamos apresentar, a título de ilustração, três delas: o *theta-pinch*, o *z-pinch* e o *screw-pinch*.

4.5.1 *Theta-pinch*

O theta-pinch consiste num vaso cilíndrico com paredes metálicas (na prática um solenóide) e que são ligadas a uma bancada de capacitores. Supomos que o eixo do vaso seja paralelo ao eixo z. Quando os capacitores são descarregados, haverá uma corrente elétrica fluindo neste vaso cilíndrico ao longo da direção $\mathbf{e}_\theta$. A duração desta corrente é da ordem da constante de tempo do circuito. Dentro do vaso cilíndrico, por sua vez, é injetado um gás a baixa pressão que é pre-ionizado transformando-se num plasma. A corrente elétrica na parede metálica do vaso induz uma densidade de corrente elétrica (imagem) no plasma $\mathbf{J} = J_\theta \hat{\mathbf{e}}_\theta$. Esta corrente, por sua vez, produz um campo magnético longitudinal $\mathbf{B} = B_z \hat{\mathbf{e}}_z$ [Fig. 4.2].

As superfícies magnéticas são cilindros de coaxiais ao eixo z, e as linhas de campo magnético são retas paralelas que jazem sobre estas superfícies. Como $B_\theta = 0$ neste caso, a relação de Bennett (4.51) fornece

$$\frac{d}{dr}\left(\frac{B_z^2}{2\mu_0} + p\right) = 0, \tag{4.53}$$

que pode ser imediatamente integrada fornecendo

$$p + \frac{B_z^2}{2\mu_0} = p + p_m = const. \tag{4.54}$$

Seja $r = a$ o raio da coluna cilíndrica de plasma, então $p(r = a) = 0$, e p_0 denota a pressão no eixo magnético. Portanto

$$p_0 + \frac{B_{z0}^2}{2\mu_0} = \frac{B_{za}^2}{2\mu_0}, \tag{4.55}$$

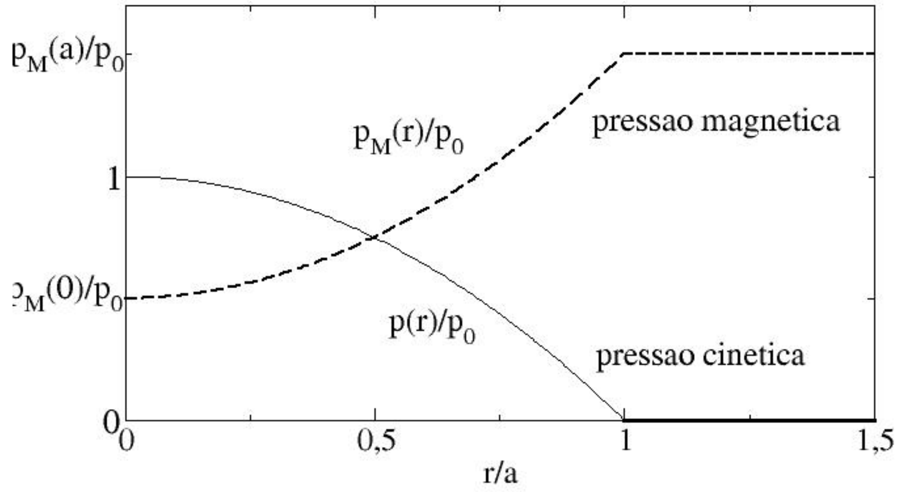

Figura 4.3: Perfis radiais das pressões cinética e magnética.

onde $B_{za} = B_z(a)$ e $B_{z0} = B_z(0)$ representam os valores do campo magnético na borda do plasma e no eixo magnético, respectivamente. Note também que qualquer perfil radial da pressão, em princípio, é possível. Porém a pressão máxima é limitada ao valor

$$(p_0)_{max} = \frac{B_{za}^2}{2\mu_0}. \tag{4.56}$$

É comum usarmos um perfil radial do tipo parabólico para a pressão cinética

$$p(r) = \begin{cases} p_0 \left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right), & \text{se } 0 \leq r \leq a \\ 0, & \text{se } r > a, \end{cases} \tag{4.57}$$

que, substituída em (4.55), fornece a relação

$$\frac{p_m(r)}{p_0} = \frac{p_m(a)}{p_0} + \left(\frac{r}{a}\right)^2 - 1, \tag{4.58}$$

ilustrada pela Fig. 4.3.

Podemos, também, determinar o beta do plasma definido em (3.24) como a razão entre as pressões cinética e magnética. De (4.55) segue que

$$\beta(r) = \frac{B_{za}^2 - B_z^2(r)}{B_z^2(r)}. \tag{4.59}$$

Para termos um confinamento magnético da coluna de plasma é necessário que a pressão magnética seja maior do que pressão cinética em cada ponto do plasma, ou seja, que $\beta(r) < 1$ para $0 \leq r \leq a$. Impondo que $\beta > 0$ em (4.59) temos que $B_z(r) < B_{za}$, ou seja, o campo magnético é menor dentro do plasma do que fora dele, ou seja, o plasma é diamagnético, o que decorre da existência da corrente diamagnética descrita em (4.44).

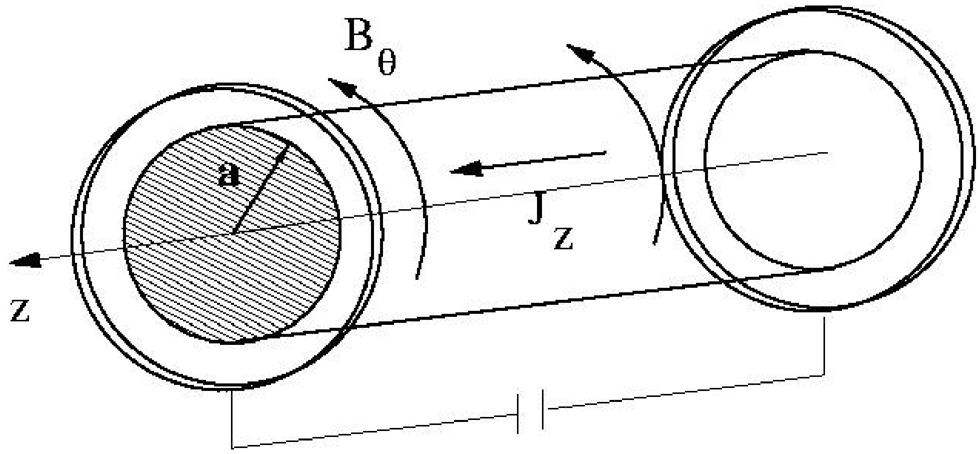

Figura 4.4: Esquema de um *z-pinch*.

Na medida em que a corrente no vaso do *theta-pinch* aumenta, assim também o campo magnético (e o valor de $p_m(a)$) vão crescer, fazendo com que o equilíbrio se dê em raios menores, o que equivale a uma compressão do plasma e, em decorrência, ao seu aquecimento. Este é o chamado efeito *pinch*, descrito por Bennett em 1934 [25].

Se desprezarmos o raio de Larmor finito, as partículas do plasma irão seguir, em primeira aproximação, as linhas de campo magnético. Como elas são retas paralelas ao eixo z, haverá portanto perdas nas extremidades do vaso cilíndrico, o que impede um confinamento do plasma por longos tempos, inviabilizando o uso do *theta-pinch* na fusão termonuclear. Por outro lado, como veremos mais tarde, a configuração de equilíbrio MHD do *theta-pinch* é estável.

4.5.2 *Z-pinch*

O *z-pinch* é essencialmente um tubo cilíndrico onde se faz alto vácuo e dentro do qual é injetado um gás (como hidrogênio ou argônio) a baixas pressões. Mas, ao contrário do theta-pinch, os eletrodos estão situados nas extremidades do tubo, de modo que, devido à descarga de uma bancada de capacitores aparece uma corrente elétrica na direção z que ioniza o plasma por efeito colisional ("aquecimento ôhmico") e o transforma numa coluna de plasma caracterizada por uma densidade de corrente $\mathbf{J} = J_z(r)\hat{\mathbf{e}}_z$. Esta última, por sua vez, gera um campo magnético na direção azimutal (ou "poloidal") $\mathbf{B} = B_\theta(r)\hat{\mathbf{e}}_\theta$ [Fig. 4.4].

Assim como no *theta-pinch*, as superfícies magnéticas são cilindros coaxiais, mas as linhas de campo magnético são, agora, círculos contidos nestas superfícies. Fazendo, pois, $B_z = 0$ na relação de Bennett (4.51) obtemos a condição de equilíbrio MHD neste caso:

$$\frac{d}{dr}\left(\frac{B_\theta^2(r)}{2\mu_0} + p\right) = -\frac{B_\theta^2(r)}{\mu_0 r} \tag{4.60}$$

Para prosseguir, no entanto, precisamos conhecer mais detalhes sobre o campo magnético, o que só se obtém a partir da densidade de corrente. Vamos considerar dois casos para os quais é possível um tratamento analítico.

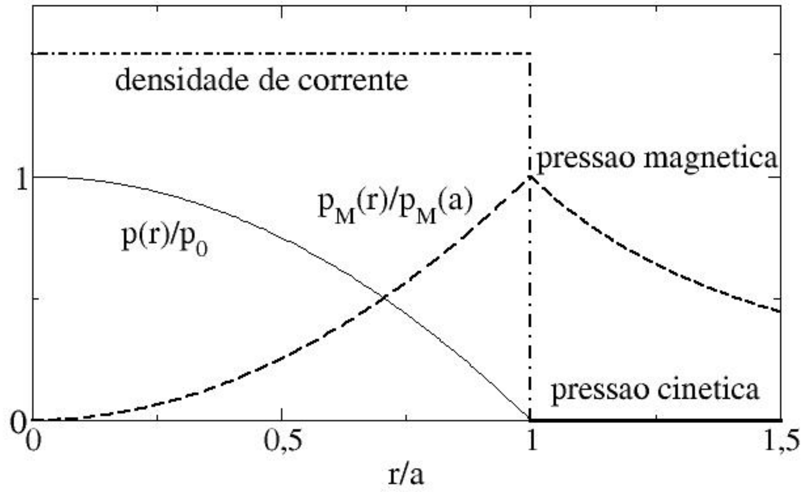

Figura 4.5: Perfis radiais das pressões cinética e magnética para uma densidade de corrente uniforme no *z-pinch*.

Densidade de corrente uniforme

Seja $r = a$ o raio da coluna de plasma, para o qual a pressão cinética é nula. Integrando (4.60) obtemos

$$p(r) = \frac{B_{\theta a}^2}{2\mu_0} - \frac{B_\theta^2(r)}{2\mu_0} + \int_r^a \frac{B_\theta^2(r')}{\mu_0}\frac{dr'}{r'}. \tag{4.61}$$

onde $B_{\theta a} = B_\theta(r = a)$.

Supondo, por simplicidade, um perfil uniforme de densidade de corrente

$$J_z = \begin{cases} J_0, & \text{se } 0 \leq r \leq a \\ 0, & \text{se } r > a, \end{cases} \tag{4.62}$$

a lei de Ampère (4.12) fornece o campo magnético

$$B_\theta(r) = \begin{cases} B_{\theta_a}\frac{r}{a}, & \text{se } 0 \leq r \leq a \\ B_{\theta a}\frac{a}{r}, & \text{se } r > a, \end{cases} \tag{4.63}$$

onde $B_{\theta_a} = \mu_0 J_0 a/2$.

Substituindo (4.63) em (4.61) resulta um perfil parabólico para a pressão:

$$p(r) = \begin{cases} \frac{1}{4}\mu_0 J_0^2(a^2 - r^2), & \text{se } 0 \leq r \leq a \\ 0, & \text{se } r > a, \end{cases} \tag{4.64}$$

de modo que pressão máxima ocorre para $r = 0$, o qual é o eixo magnético nesse sistema:

$$p_{max} = p(0) = \frac{1}{4}\mu_0 J_0^2 a^2 = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I_P^2}{a^2} \tag{4.65}$$

aumenta com o quadrado da corrente de plasma $I_P = J_0 \pi a^2$. Na Fig. 4.5 mostramos os perfis das pressões cinética e magnética para este caso. O valor máximo da última é

$$p_{ma} = \frac{B_{\theta a}^2}{2\mu_0} = \frac{\mu_0 J_0^2 a^2}{8}, \tag{4.66}$$

tal que o parâmetro beta (3.24), é neste caso

$$\beta(r) = 2\left[\left(\frac{a}{r}\right)^2 - 1\right] \tag{4.67}$$

Se nós aumentarmos a corrente de plasma no z-pinch, assim também o campo magnético irá aumentar em seu interior, provocando a compressão (efeito *pinch*) e o consequente aquecimento do plasma. Para termos uma ideia da ordem de grandeza das quantidades envolvidas, vamos supor que a coluna de plasma tenha inicialmente uma seção reta de área $A_0 = \pi r_0^2$ e uma densidade de partículas n_0. Após a compressão da coluna de plasma seja a o seu raio de equilíbrio e n a densidade correspondente de partículas. Devido à conservação do número de partículas, temos que $A_0 n_0 = \pi a^2 n$.

No equilíbrio a pressão cinética p é igual à pressão magnética p_m. Usando a equação dos gases ideais temos

$$n k_B T = \frac{B_{\theta a}^2}{2\mu_0}.$$

Podemos estimar o campo magnético na fronteira do plasma como sendo $B_{\theta a} = \mu_0 I_p / 2\pi a$, onde I_p é a corrente de plasma na direção longitudinal. Teremos, assim

$$I_p = \sqrt{\frac{8\pi}{\mu_0} A_0 n_0 k_B T}.$$

Considerando parâmetros típicos para plasmas de fusão ($n_0 = 10^{17} m^{-3}$ e $k_B T = 10 keV$) e estimando $r_0 = 1m$ teremos uma corrente de plasma da ordem de $0,1 MA$ devido ao efeito pinch.

No entanto, há vários problemas práticos envolvidos na obtenção de uma coluna de plasma com estas características. Em primeiro lugar, além do aquecimento do plasma devido à compressão, a corrente de plasma irá também dissipar calor (quando consideramos uma resistividade não-nula). Em segundo lugar, pode-se mostrar que a configuração de equilíbrio MHD do z-pinch (ao contrário do theta-pinch) é instável.

Densidade de corrente pelicular

Experimentalmente se sabe que, no estágio inicial da descarga que origina a coluna de plasma no z-pinch, a densidade de corrente está limitada a uma fina casca cilíndrica (de espessura 2δ) na superfície da coluna de plasma de raio a [26]. Neste caso temos de considerar um modelo alternativo, considerando que, dentro do plasma tanto a densidade de corrente como o campo sejam nulos, enquanto fora do plasma a pressão é nula mas o campo é diferente de zero, devido a uma casca $[a-\delta, a+\delta]$ contendo uma densidade de corrente:

$$\begin{cases} J_z = B_\theta = 0, & \text{se } 0 \leq r \leq a \\ p = 0, B_\theta \neq 0, & \text{se } r > a, \end{cases} \tag{4.68}$$

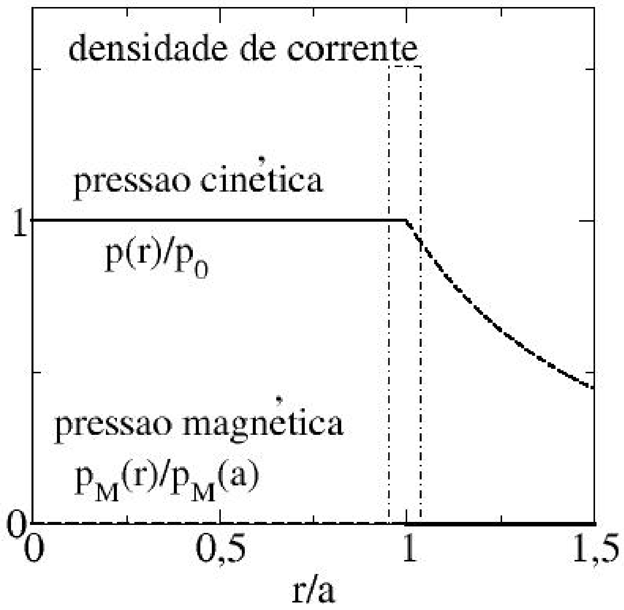

Figura 4.6: Perfis radiais das pressões cinética e magnética para uma densidade de corrente pelicular no *z-pinch*.

Para $r < a$ a relação de Bennett (4.60) fornece imediatamente $dp/dr = 0$, de forma que $p = p_0 = const$. Já para $r > a$ (4.51) leva-nos a

$$\frac{d}{dr}\left(\frac{B_\theta^2}{2\mu_0}\right) = -\frac{B_\theta^2}{\mu_0 r}, \tag{4.69}$$

a qual pode ser integrada fornecendo

$$\frac{B_\theta^2}{\mu_0} = \frac{C}{r^2}. \tag{4.70}$$

Para determinar a constante de integração vamos integrar (4.60) no intervalo $[a - \delta, a + \delta]$ onde existe uma densidade pelicular de corrente:

$$\int_{a-\delta}^{a+\delta} dr \frac{d}{dr}\left(\frac{B_\theta^2(r)}{2\mu_0} + p\right) = -\int_{a-\delta}^{a+\delta} dr \frac{B_\theta^2(r)}{\mu_0 r}.$$

Substituindo (4.70) obtemos que $C = 2a^2 p_0$, de modo que a pressão magnética será nula para $r < a$ e

$$p_m = p_0 \frac{a^2}{r^2}, \qquad (r > a). \tag{4.71}$$

Na Fig. 4.6 mostramos os perfis das pressões cinética e magnética para este caso. Na medida em que evolui a descarga, se considerarmos a resistividade finita do plasma, ocorrerá uma difusão magnética: a densidade de corrente migra para o interior da coluna de plasma assim como as próprias linhas de campo magnético. Se o processo leva a uma uniformização da densidade de corrente, como no exemplo anterior, os perfis das pressões cinética e magnética ficam como na Fig. 4.5. No caso de corrente pelicular, só faz sentido definirmos o beta do plasma na fronteira, de sorte que $\beta(a) = p_0/p_0 = 1$.

4.5.3 *Screw-pinch*

O *screw-pinch* é essencialmente um *z-pinch* no qual incluimos um campo magnético na direção do eixo z, o que é feito por meio de bobinas enroladas externamente ao vaso cilíndrico, como num solenóide. O screw-pinch tem um campo magnético $\mathbf{B} = B_\theta \hat{\mathbf{e}}_\theta + B_z \hat{\mathbf{e}}_z$ tal que a relação de Bennett (4.51) vale na sua integridade:

$$\frac{d}{dr}\left(p + \frac{B_\theta^2}{\mu_0 r} + \frac{B_z^2}{\mu_0 r}\right) = -\frac{B_\theta^2}{\mu_0 r}, \tag{4.72}$$

de forma que a pressão magnética é maior no screw-pinch do que no z-pinch. As linhas de campo magnético são, agora, helicoidais, e jazem sobre superfícies magnéticas cilíndricas coaxiais.

Para obter os campos magnéticos nesse caso precisamos arbitrar perfis radiais tanto para a pressão cinética como para a densidade de corrente. Vamos considerar um caso semelhante ao do z-pinch, para o qual

$$J_z(r) = \begin{cases} J_0\left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right) & \text{se } r < a \\ 0 & \text{se } r > a. \end{cases}, \tag{4.73}$$

$$p(r) = \begin{cases} p_0 & \text{se } r < a \\ 0 & \text{se } r > a. \end{cases}. \tag{4.74}$$

Extraindo a componente z da lei de Ampère (4.12) obtemos a componente azimutal do campo magnético:

$$B_\theta(r) = \frac{\mu_0}{r}\int_0^r dr' r' J_z(r'). \tag{4.75}$$

Substituindo (4.73) uma integração elementar fornece

$$B_\theta(r) = \begin{cases} B_{\theta a}\frac{2r}{a}\left(1 - \frac{r^2}{2a^2}\right) & \text{se } r < a \\ B_{\theta a}\frac{a}{r} & \text{se } r > a. \end{cases}, \tag{4.76}$$

onde

$$B_{\theta a} = B_\theta(a) = \frac{\mu_0 J_0 a}{4} = \frac{\mu_0 I_P}{2\pi a}, \tag{4.77}$$

sendo $I_P = \pi J_0 a^2/2$ a corrente de plasma.

Inserindo este resultado na relação de Bennett (4.72) obtemos, para $r < a$,

$$\frac{B_z^2(r)}{2\mu_0} = \frac{2B_{\theta a}^2}{\mu_0}\left(\frac{2}{3} - 2\frac{r^2}{a^2} + \frac{3}{2}\frac{r^4}{a^4} - \frac{1}{3}\frac{r^6}{a^6}\right) + C, \tag{4.78}$$

onde C é uma constante de integração. Para determiná-la, integramos (4.72) no entorno de $r = a$:

$$\int_{a-\delta}^{a+\delta} dr \frac{d}{dr}\left(\frac{B_\theta^2(r) + B_z^2(r)}{2\mu_0} + p\right) = -\int_{a-\delta}^{a+\delta} dr \frac{B_\theta^2(r)}{\mu_0 r}.$$

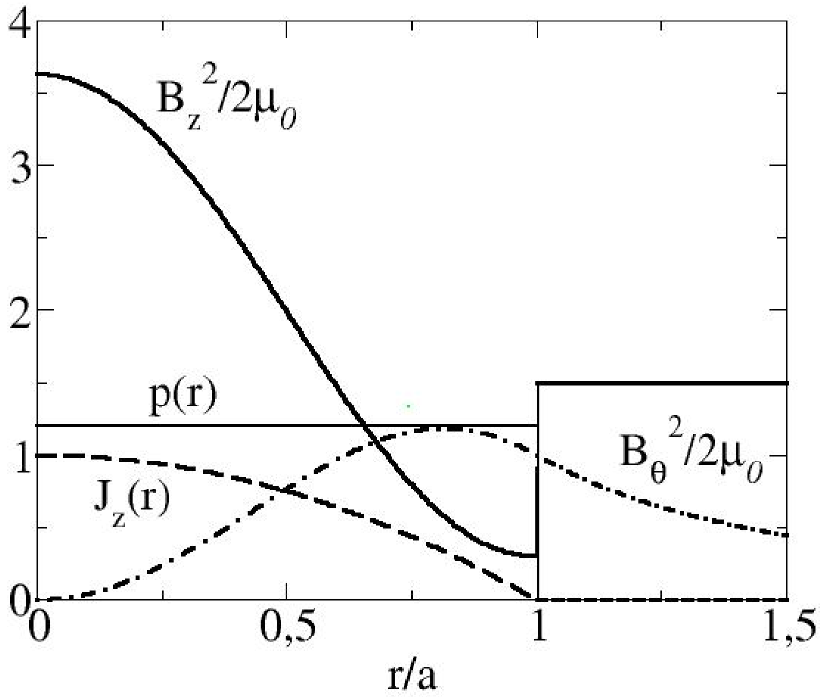

Figura 4.7: Perfis radiais das seguintes quantidades: pressão cinética, densidade de corrente, pressões magnéticas parciais $B_\theta^2/2\mu_0$ e $B_z^2/2\mu_0$ para um *screw-pinch*. As pressões estão normalizadas por $B_{\theta a}^2/2\mu_0$.

Como o campo B_θ é contínuo em $r = a$ o lado direito da expressão acima anula-se quando $\delta \to 0$. Já o lado esquerdo fornece

$$\frac{B_\theta^2(a+\delta)}{2\mu_0} + \frac{B_z^2(a+\delta)}{2\mu_0} = p_0 + \frac{B_\theta^2(a-\delta)}{2\mu_0} + \frac{B_z^2(a-\delta)}{2\mu_0}.$$

Tomando o limite quando $\delta \to 0$ temos que

$$\frac{B_v^2}{2\mu_0} = p_0 + \frac{B_{za}^2}{2\mu_0}, \tag{4.79}$$

onde $B_v = B_z(a+\delta)$ é um campo de vácuo gerado pelas bobinas externas ao vaso cilíndrico.

Substituindo (4.79) em (4.78), avaliada no ponto $r = a$, achamos

$$C = \frac{B_v^2}{2\mu_0} - p_0 + \frac{B_{\theta a}^2}{3\mu_0},$$

de modo que (4.78) torna-se

$$\frac{B_z^2(r)}{2\mu_0} = \frac{B_v^2}{2\mu_0} - p_0 + \frac{B_{\theta a}^2}{\mu_0}\left(\frac{5}{3} - 4\frac{r^2}{a^2} + 3\frac{r^4}{a^4} - \frac{2}{3}\frac{r^6}{a^6}\right). \tag{4.80}$$

Na figura 4.7 mostramos perfis radiais das pressões cinética e magnética para o screw-pinch. O beta do plasma para o *screw-pinch* é dado por (3.24), juntamente com (4.76) e (4.80):

$$\beta = \frac{2\mu_0 p_0}{B_z^2 + B_\theta^2} = \frac{2\mu_0 p_0}{B_v^2}\left[1 - \frac{2\mu_0 p_0}{B_v^2} + \frac{2B_{\theta a}^2}{B_v^2}\left(\frac{5}{3} - 2\frac{r^2}{a^2} + \frac{r^4}{a^4} - \frac{1}{6}\frac{r^6}{a^6}\right)\right]^{-1}. \tag{4.81}$$

4.5.4 Beta poloidal

Multiplicando (4.51) por r^2 e integrando radialmente ao longo da coluna de plasma

$$\int_0^a r^2 dr \frac{d}{dr}\left(\frac{B_\theta^2 + B_z^2}{2\mu_0} + p\right) = -\frac{1}{\mu_0}\int_0^a drrB_\theta^2. \tag{4.82}$$

Após uma integração por partes resulta

$$\left(p + \frac{B_\theta^2 + B_z^2}{2\mu_0}\right)_{r=a} = \frac{1}{\pi a^2}\int_0^a 2\pi r dr\left(p + \frac{B_z^2}{2\mu_0}\right). \tag{4.83}$$

Sendo πa^2 a área da seção reta da coluna de plasma, definimos a média de uma quantidade arbitrária χ sobre a seção reta como

$$\langle\chi\rangle = \frac{\oint da\chi}{\oint da} = \frac{2}{a^2}\int_0^a dr\, r dr \chi(r), \tag{4.84}$$

de modo que reescrevemos (4.83) como

$$p(a) + \frac{B_\theta^2(a) + B_z^2(a)}{2\mu_0} = \langle p\rangle + \frac{\langle B_z^2\rangle}{2\mu_0}. \tag{4.85}$$

Sabemos que uma condição para o confinamento magnético da coluna de plasma é que $\beta < 1$. Quando existe um campo na direção θ, como no screw-pinch, é útil definirmos também um "beta poloidal", considerando apenas a pressão magnética produzida por B_θ:

$$\beta_p = \frac{\langle p\rangle}{B_\theta^2(a)/2\mu_0}, \tag{4.86}$$

que é particularmente útil na descrição de um plasma com fronteira difusa ($p(a) = 0$). Usando (4.85) obtemos

$$\beta_p = 1 + \frac{B_\theta^2(a) - \langle B_z^2\rangle}{2\mu_0} \approx 1 + \left(\frac{2B_z(a)}{B_\theta^2(a)}\right)\langle B_\theta^2(a) - B_z^2\rangle, \tag{4.87}$$

onde, na última relação, usamos a aproximação quando $|B_z(a) - B_z(r)| \ll |B_z(a)|$.

Três casos distintos se apresentam:

- $\beta_p > 1$: neste caso $B_z(r) < B_z(a)$, ou seja, o campo magnético longitudinal dentro do plasma é enfraquecido, em relação ao seu valor fora do mesmo;
- $\beta_p < 1$: agora $B_z(r) > B_z(a)$, e o campo no plasma é reforçado, em relação ao seu valor exterior;
- $\beta_p = 1$: a presença do plasma não afeta o campo magnético em seu interior.

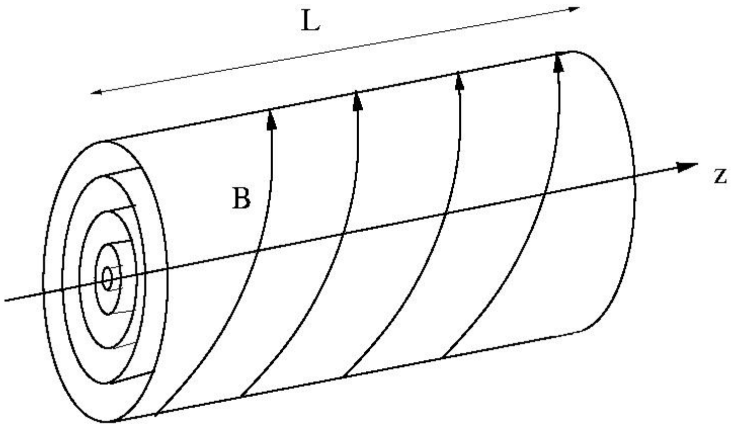

Figura 4.8: Linhas de campo helicoidais sobre superfícies magnéticas cilíndricas.

4.6 Fator de segurança cilíndrico

Nos três exemplos que vimos de equilíbrios MHD com simetria cilíndrica as superfícies magnéticas são cilindros coaxiais ($r = const.$), sobre as quais jazem as linhas de campo magnético. Em particular, para o *screw-pinch* as linhas de campo são hélices cilíndricas, cujo passo depende das intensidades dos campos magnéticos nas direções z e θ. Para determinar esta relação, vamos explorar a equação das linhas de campo magnético

$$\mathbf{B} \times \boldsymbol{d\ell} = 0, \tag{4.88}$$

que, em coordenadas cilíndricas-I resulta em

$$\frac{dr}{B_r} = \frac{rd\theta}{B_\theta} = \frac{dz}{B_z}. \tag{4.89}$$

Como a componente radial é nula ($B_r = 0$) estamos interessados apenas nos dois últimos termos da equação acima. Definiremos o fator de segurança cilíndrico para a superfície magnética como

$$q_c(r) = \frac{1}{L}\frac{dz}{d\theta}, \tag{4.90}$$

onde L é o comprimento do cilindro. O fator de segurança (nome baseado na estabilidade MHD, como veremos) é, de fato, uma medida do passo relativo da hélice, ou seja, a distância relativa $\Delta z/L$ ao longo da direção z que a hélice avança após uma volta completa na direção angular θ [Fig. 4.8]. Dessa forma, um valor alto de $q_c(r)$ indica que a hélice que jaz sobre a superfície $r = const.$ tem um passo grande, enquanto um q_c baixo indica uma hélice com passo menor, portanto com voltas mais compactadas.

Usando (4.89) podemos escrever o fator de segurança cilíndrico como

$$q_c(r) = \frac{rB_z}{LB_\theta}. \tag{4.91}$$

Para o *theta-pinch*, como $B_\theta = 0$ o fator de segurança é infinito (as linhas de campo são retas paralelas). No caso do *z-pinch*, como $B_z = 0$ o fator de segurança é igual a zero, pois as linhas de campo são círculos concêntricos. Finalmente, no *screw-pinch* ambos os campos são não-nulos, e o fator de segurança depende, em geral, de r. A variação

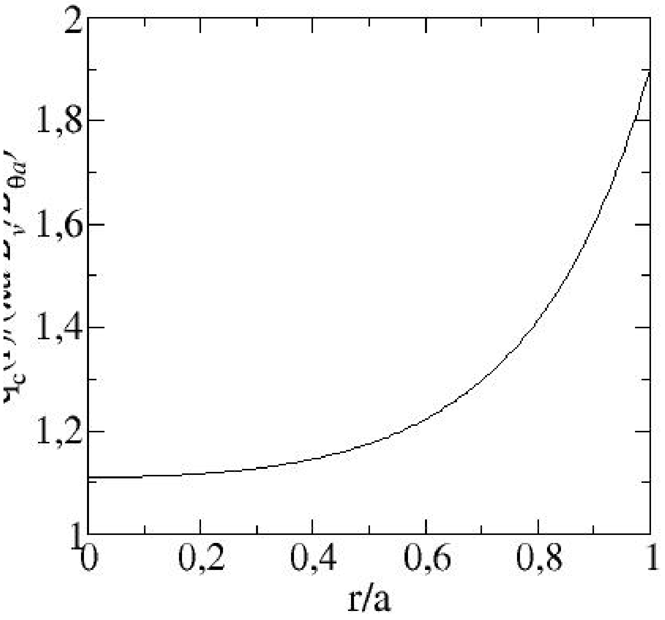

Figura 4.9: Perfil radial do fator de segurança cilíndrico para o *screw-pinch*.

de q_c com o raio r é chamada cizalhamento das linhas de campo. A partir de (4.76) e (4.80) resulta que

$$B_z(r) = B_v \left[1 - \frac{2\mu_0 p_0}{B_v^2} + \frac{2B_{\theta a}^2}{B_v^2} \left(\frac{5}{3} - 4\frac{r^2}{a^2} + 3\frac{r^4}{a^4} - \frac{2}{3}\frac{r^6}{a^6} \right) \right]^{1/2}. \tag{4.92}$$

onde B_v é o campo na direção z fora do plasma. Dentro da coluna de plasma ($r < a$) o termo entre parênteses é muito pequeno. Assim, supondo que $B_v \gg 2\mu_0 p_0$ e $B_v \gg B_{\theta a}$ podemos usar o teorema binomial para obter a expressão aproximada

$$B_z(r) \approx B_v \left[1 - \frac{\mu_0 p_0}{B_v^2} + \frac{B_{\theta a}^2}{B_v^2} \left(\frac{5}{3} - 4\frac{r^2}{a^2} + 3\frac{r^4}{a^4} - \frac{2}{3}\frac{r^6}{a^6} \right) \right]. \tag{4.93}$$

Na Figura 4.9 mostramos um exemplo numérico para o perfil radial do fator de segurança do *screw-pinch*. Tipicamente temos um fator de segurança que tem um valor da ordem de 1 sobre o eixo magnético, e que cresce monotonicamente para um valor da ordem de 2 ou superior na fronteira do plasma.

4.7 Manchas solares

As manchas solares são regiões escuras na superfície do Sol, algumas delas visíveis da Terra com o auxílio de telescópios [Fig. 4.10]. Elas são temporárias, tendo uma duração típica de alguns dias, embora manchas muito grandes possam perdurar por várias semanas ou até meses, antes de desaparecer. O número de manchas solares varia de acordo com um ciclo bem conhecido com um período de aproximadamente onze anos.

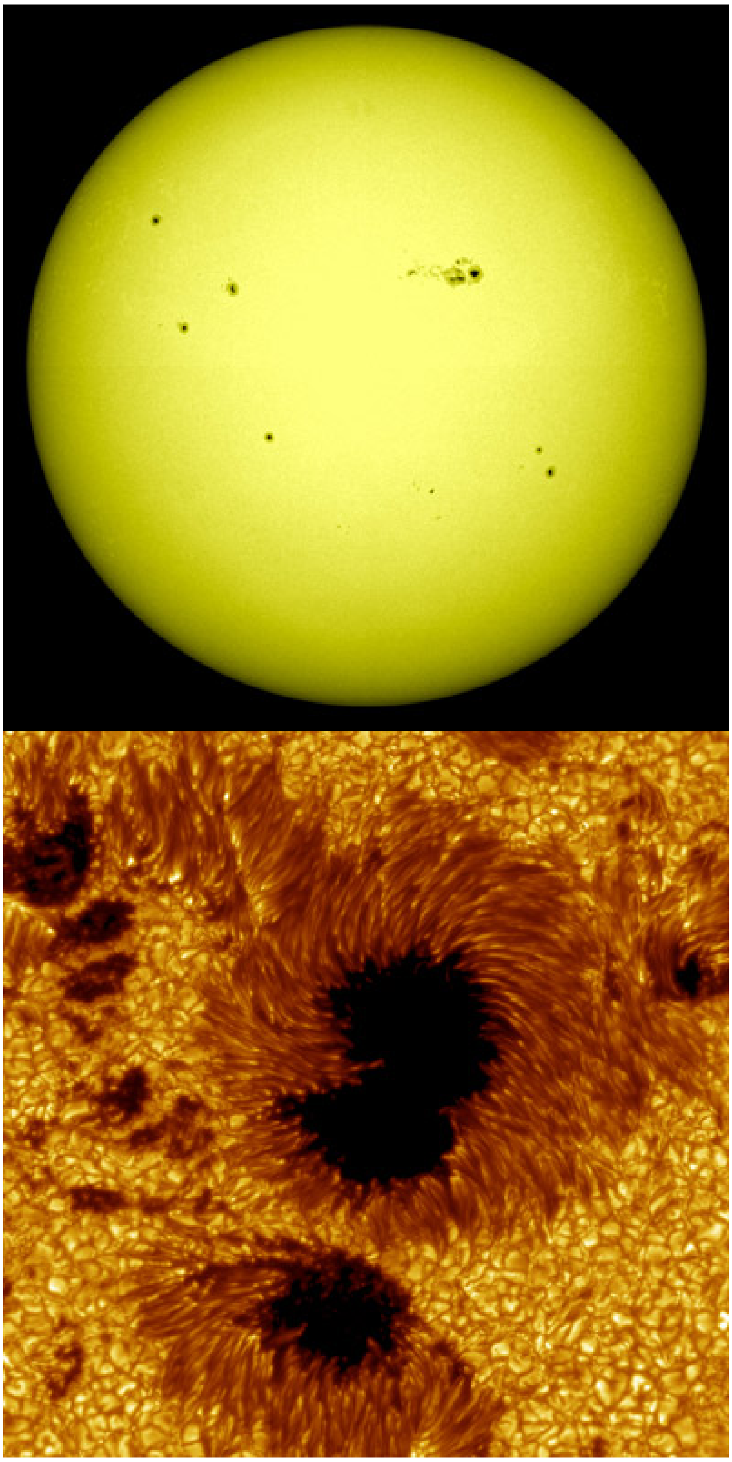

Figura 4.10: Acima: mancha solar. Créditos da imagem: NASA/SDO and the AIA, EVE, and HMI science teams. Abaixo: ampliação de um grupo de manchas. Créditos da imagem: Royal Swedish Academy of Sciences - Göran Scharmer and Mats Löfdahl. Disponível em https://scied.ucar.edu/learning-zone/sun-space-weather/sunspots

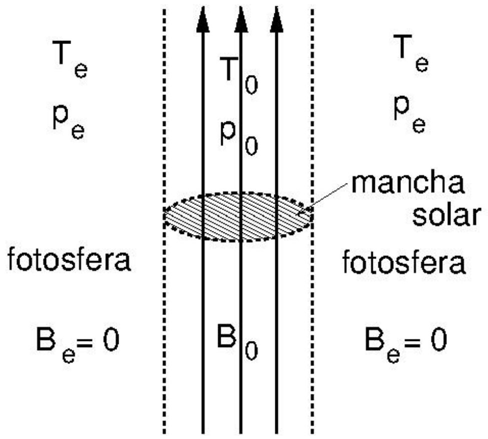

Figura 4.11: Um tubo de fluxo magnético associado a uma mancha solar.

Tais manchas são escuras pois correspondem a regiões da fotosfera Solar onde a temperatura é reduzida. A intensidade do campo magnético numa mancha solar é milhares de vezes maior do que o campo magnético Terrestre. A presença de manchas solares é indicativa da ocorrência de intensa atividade como alças coronais, proeminências e eventos de reconexão. Como são regiões magneticamente ativas, eventos como erupções solares (solar flares) e ejeções de massa coronal também originam-se em regiões vizinhas às manchas.

Vamos considerar, por simplicidade, uma mancha solar como um tubo de fluxo magnético, onde o campo magnético $\mathbf{B}_0$ é vertical (em relação à fotosfera). Fora do tubo de plasma o campo magnético pode ser desprezado. As pressões do plasma Solar dentro e fora deste tubo de fluxo são denotadas por p_0 e p_e, respectivamente, e as temperaturas por T_0 e T_e [Fig. **??**].

Podemos caracterizar as manchas solares como objetos de longa duração sem fluxos rápidos de plasma, de modo que é razoável descrevermos sua estrutura usando as equações do equilíbrio MHD estático. Devido á simetria cilíndrica do tubo de fluxo podemos usar a relação (4.53), similar à do *theta pinch*:

$$\frac{d}{dr}\left(\frac{B_z^2}{2\mu_0} + p\right) = 0, \tag{4.94}$$

que pode ser integrada dentro e fora do tubo de fluxo:

$$p_0 + \frac{B_0^2}{2\mu_0} = p_e \tag{4.95}$$

Usando a equação de estado temos as seguintes relações entre as pressões, densidades e temperaturas

$$p_e = \frac{k_B \rho_e T_e}{m_i}, \qquad p_0 = \frac{k_B \rho_0 T_0}{m_i}, \tag{4.96}$$

onde k_B é a constante de Boltzmann e m_i a massa dos íons. Vamos presumir que as densidades do plasma dentro e fora do tubo de fluxo sejam as mesmas: $\rho_e = \rho_0$. Substituindo (4.96) em (4.95) obtemos uma relação para as temperaturas

$$\frac{T_0}{T_e} = 1 - \frac{B_0^2}{2\mu_0 p_e}. \tag{4.97}$$

Como o segundo termo do lado direito da equação acima é sempre positivo, resulta que $T_0 < T_e$, ou seja, a temperatura no interior do tubo de fluxo é menor do que a temperatura da vizinhança. De fato, as medidas indicam uma temperatura $T_0 \sim 3700K$ no interior da mancha solar, ao passo que a Fotosfera tem uma temperatura $T_e \sim 5700K$.

4.8 Campos sem forças

É importante observar que as relações $\mathbf{B} \cdot \nabla p = 0$ e $\mathbf{J} \cdot \nabla p = 0$ não implicam que $\mathbf{B}$ seja paralelo a $\mathbf{J}$, ou seja, em geral estes dois vetores não são paralelos. Uma exceção, no entanto, é o caso em que a pressão cinética do plasma é muito menor do que a pressão magnética, ou que o valor do beta correspondente seja muito baixo.

Neste caso a pressão cinética do plasma pode ser desprezada em comparação à pressão magnética e a equação de equilíbrio (4.11) reduz-se à condição

$$\mathbf{J} \times \mathbf{B} = \mathbf{0} \tag{4.98}$$

tal que a força magnética correspondente é nula. Estes plasmas são chamados "sem-forças" (*force-free*).

A relação (4.98) é satisfeita se

$$\mu_0 \mathbf{J} = \alpha \mathbf{B}, \tag{4.99}$$

onde α é um fator ainda indeterminado. Há duas possibilidades:

- se $\alpha = 0$ então $\mathbf{J} = \mathbf{0}$;
- se $\alpha \neq 0$, então $\mathbf{J}$ é paralelo a $\mathbf{B}$.

No primeiro caso (corrente nula), da lei de Ampère (4.12) temos que $\nabla \times \mathbf{B} = \mathbf{0}$, de modo que podemos escrever o campo magnético como o gradiente de um potencial escalar magnético χ:

$$\mathbf{B} = \nabla \chi. \tag{4.100}$$

Substituindo na lei de Gauss magnética (4.13) decorre que o potencial escalar magnético satisfaz a equação de Laplace

$$\nabla^2 \chi = 0. \tag{4.101}$$

No segundo caso ($\mathbf{J}$ paralelo a $\mathbf{B}$), a eq. (4.12) implica que

$$\nabla \times \mathbf{B} = \alpha \mathbf{B}, \tag{4.102}$$

e que, substituida em (4.13), fornece a relação

$$\mathbf{B} \cdot \nabla \alpha = 0. \tag{4.103}$$

Desdobramos este segundo caso em duas situações possíveis: se α for espacialmente uniforme, então $\nabla \alpha = 0$ e

$$\nabla \times (\alpha \mathbf{B}) = \alpha \nabla \times \mathbf{B} = \alpha^2 \mathbf{B}.$$

Tomando o rotacional de (4.102) obtemos, então, que o campo magnético deve satisfazer a equação de Helmholtz

$$\nabla^2 \mathbf{B} + \alpha^2 \mathbf{B} = 0. \tag{4.104}$$

A segunda situação possível é quando α depender da posição. Fazendo as mesmas manipulações anteriores chegamos a um sistema de duas equações acopladas:

$$\nabla^2 \mathbf{B} + \alpha^2 \mathbf{B} = \mathbf{B} \times \nabla \alpha, \tag{4.105}$$

$$\mathbf{B} \cdot \nabla \alpha = 0. \tag{4.106}$$

4.8.1 Alças coronais

O plasma na corona solar tem um fator beta muito pequeno, da ordem de $\beta \approx 0,004$, o que nos permite modelas alguns fenômenos usando campos sem forças. Um deles são as alças coronais.

Por simplicidade, suporemos que a escala de comprimento das alças seja pequena o suficiente para que possamos considerar a superfície Solar como plana. Outra hipótese simplificadora é que tais alças tem uma simetria translacional, de forma a permitir o uso de um sistema de coordenadas cartesianas bidimensionais (x,y), onde y é uma coordenada na direção vertical (perpendicular à superfície) e x uma coordenada na direção horizontal (paralela à superfície). Neste contexto o campo magnético é dado por

$$\mathbf{B} = B_x(x,y)\hat{e}_x + B_y(x,y)\hat{e}_y. \tag{4.107}$$

Uma terceira simplificação resulta em desprezar a existência de correntes elétricas, de modo que $\mathbf{J} = \mathbf{0}$, o que nos permite usar a aproximação de campos sem forças com $\alpha = 0$. A lei de Ampère será, então,

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mathbf{0}, \tag{4.108}$$

e a equação de Helmholtz (4.104) reduz-se à uma equação de Laplace vetorial

$$\nabla^2 \mathbf{B} = 0. \tag{4.109}$$

Aplicando o campo dado por (4.107) nas equações anteriores obtemos as seguintes relações para as suas componentes cartesianas

$$\frac{\partial B_x}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial x} = 0, \tag{4.110}$$

$$\frac{\partial^2 B_x}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 B_x}{\partial y^2} = 0. \tag{4.111}$$

Para resolver a equação (4.111) aplicamos separação de variáveis

$$B_x(x,y) = X(x)Y(y), \tag{4.112}$$

o que nos leva a

$$\frac{d^2X}{dx^2}Y + X\frac{d^2Y}{dy^2} = -\frac{1}{L^2}, \tag{4.113}$$

onde L é uma constante de separação. Dividindo por XY obtemos duas equações desacopladas cujas soluções conduzem ao seguinte resultado

$$B_x(x,y) = B_0 \cos\left(\frac{x}{L}\right) \exp\left(-\frac{y}{L}\right), \tag{4.114}$$

onde B_0 é um fator constante. A partir da aplicação de (4.110), a outra componentes do campo magnético é

$$B_y(x,y) = -B_0 \sin\left(\frac{x}{L}\right) \exp\left(-\frac{y}{L}\right). \tag{4.115}$$

Neste modelo simples já é possível divisar duas propriedades importantes do campo magnético numa alça coronal: o campo diminui com a distância à superfície, e tem um comportamento oscilatório ao longo dela. De fato, as equações das linhas de força do campo magnético são dadas por (4.40):

$$\frac{dy}{dx} = \frac{B_y}{B_x} = -\tan\left(\frac{x}{L}\right), \tag{4.116}$$

e mostram que L é um comprimento característico das alças, que têm a curvatura correta, ou seja, elas são ancoradas na superfície e projetam-se para cima.

4.8.2 Modelo de Taylor

Um exemplo de campos sem forças foi proposto por Taylor para o caso em que α é constante, num sistema de coordenadas cilíndricas-I [27]. A equação de Helmholtz (4.104) é escrita como:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial z^2} + \alpha^2 \mathbf{B} = 0. \tag{4.117}$$

Se a configuração em análise for um cilindro muito longo, podemos supor que as componentes de $\mathbf{B}$ só possam depender de r ($\partial_\theta = 0$ e $\partial_\phi = 0$), o que simplifica bastante a equação de Helmholtz:

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{d\mathbf{B}}{dr}\right) + \alpha^2 \mathbf{B} = 0. \tag{4.118}$$

Além disso, também por simetria, não haverá componente radial do campo magnético, donde teremos, como no *screw-pinch*

$$\mathbf{B} = (0, B_\theta(r), B_z(r)). \tag{4.119}$$

e que satisfaz identicamente a lei de Gauss magnética (4.13).

A componente z do campo satisfaz

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dB_z}{dr}\right) + \alpha^2 B_z = 0. \tag{4.120}$$

que, substituindo a variável independente por $x = \alpha r$, nos conduz a uma equação de Bessel de ordem $\nu = 0$. A solução regular na origem será $J_0(\alpha r)$, de modo que

$$B_z(r) = B_0 J_0(\alpha r), \tag{4.121}$$

onde B_0 é uma constante.

Extraindo a componente θ de (4.102) temos

$$-\frac{\partial B_z}{\partial r} = \alpha B_\theta, \tag{4.122}$$

de modo que

$$B_\theta(r) = -\frac{1}{\alpha}\frac{dB_z}{dr} = -B_0 J'_0(\alpha r) = B_0 J_1(\alpha r). \tag{4.123}$$

É interessante observar o que ocorre com a componente z do campo magnético numa coluna cilíndrica de raio a. Como a primeira raiz da função de Bessel J_0 é $2,4048\ldots$, então se $\alpha a > 2,4048$ então existe um ponto no intervalo $0 < r < a$ onde ocorre uma reversão no sentido da componente B_z [Fig. 4.12]. Configurações deste tipo são chamados *pinches* de campo reverso (RFP).

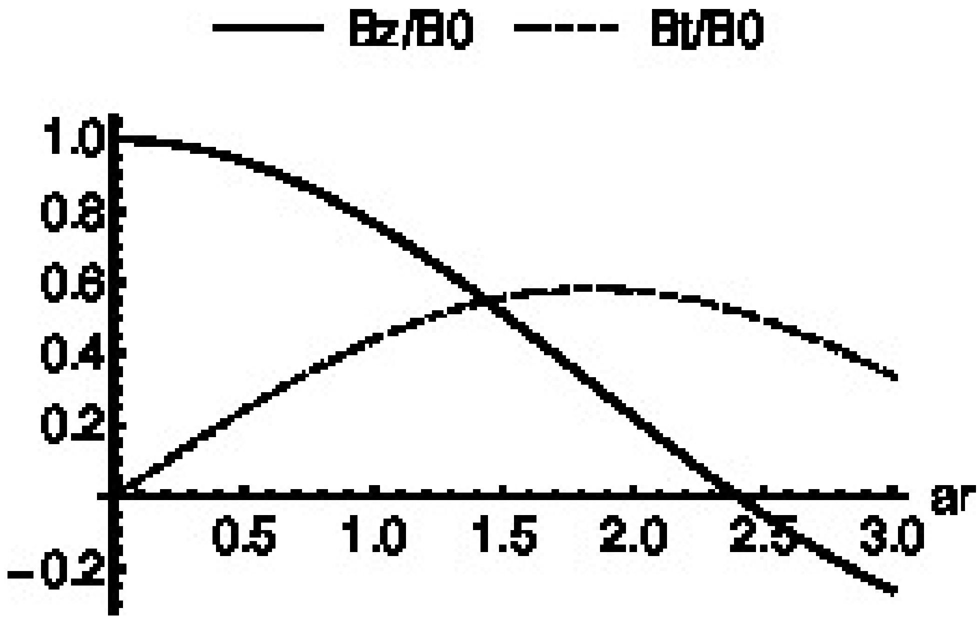

Figura 4.12: Perfis radiais dos campos magnéticos para o modelo de Taylor.

4.8.3 Helicidade magnética

J. B. Taylor, em 1974, interpretou a reversão de sentido do campo B_z como proveniente de um processo de relaxação no qual um plasma inicialmente muito instável atinge um estado final quiescente estável [27]. Desta forma, um plasma turbulento passa por um processo de relaxação até gerar uma configuração de campo reverso. Esta configuração é caracterizada por um mínimo da energia potencial, sujeita ao vínculo de que a helicidade magnética, definida por

$$\mathcal{H} = \int_V d^3r \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}, \tag{4.124}$$

seja mantida constante.

A derivada temporal da helicidade é

$$\frac{d\mathcal{H}}{dt} = \int_V d^3r \left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{A} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right). \tag{4.125}$$

O campo elétrico, por sua vez, pode ser expresso em termos de um potencial escalar Φ e um potencial vetor $\mathbf{A}$ como [20]

$$\mathbf{E} = -\nabla\Phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}. \tag{4.126}$$

Da lei de Faraday,

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\nabla \times \mathbf{E}. \tag{4.127}$$

Substituindo (4.126) e (4.127) em (4.125) obtemos

$$\frac{d\mathcal{H}}{dt} = \int_V d^3r \left[-\mathbf{E} \cdot \mathbf{B} - \nabla\Phi \cdot \mathbf{B} - (\nabla \times \mathbf{E}) \cdot \mathbf{A} \right]. \tag{4.128}$$

Usando as seguintes identidades vetoriais

$$\nabla \cdot (\Phi \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot \nabla \Phi + \Phi(\nabla \cdot \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot \nabla \Phi, \tag{4.129}$$

$$\nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{A}) = (\nabla \times \mathbf{E}) \cdot \mathbf{A} - \mathbf{E} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = (\nabla \times \mathbf{E}) \cdot \mathbf{A} - \mathbf{E} \cdot \mathbf{B}, \tag{4.130}$$

onde usamos também a Lei de Gauss magnética e $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$. Substituindo estes resultados em (4.128) obtemos

$$\begin{aligned}
\frac{d\mathcal{H}}{dt} &= -2 \int_V d^3 r \mathbf{E} \cdot \mathbf{B} - \int_V d^3 r \nabla \cdot (\Phi \mathbf{B} + \mathbf{E} \times \mathbf{A}), \\
&= -2 \int_V d^3 r \mathbf{E} \cdot \mathbf{B} - \oint_S da\, \hat{\mathbf{n}} \cdot (\Phi \mathbf{B} + \mathbf{E} \times \mathbf{A}),
\end{aligned} \tag{4.131}$$

onde usamos o teorema do divergente, sendo S a superfície fechada que contém o volume do plasma, e $\hat{\mathbf{n}}$ é um vetor unitário normal a S em cada ponto.

Vamos supor que o plasma esteja confinado por uma parede perfeitamente condutora, que coincide com a superfície S. As condições de contorno clássicas do eletromagnetismo, nesse caso, nos dizem que a componente normal do campo magnético e a componente tangencial do campo elétrico anulam-se em S [20], ou seja,

$$(\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{E})_S = \mathbf{0}, \qquad (\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{B})_S = 0, \tag{4.132}$$

de modo que a integral de superfície em (4.131) anula-se e temos somente a contribuição da integral volumétrica, a saber:

$$\frac{d\mathcal{H}}{dt} = -2 \int_V d^3 r \mathbf{E} \cdot \mathbf{B}. \tag{4.133}$$

Para um plasma descrito pela MHD ideal a lei de Ohm generalizada é

$$\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B} = \mathbf{0},$$

donde $\mathbf{E} \cdot \mathbf{B}$ é identicamente nulo, ou seja, $\mathcal{H}$ é constante, ou seja, um invariante exato. No entanto, como plasmas reais têm uma condutividade finita, Taylor conjecturou que em um plasma turbulento a helicidade magnética permanece aproximadamente constante, enquanto a energia potencial

$$W = \int_V d^3 r \frac{B^2}{2\mu_0} \tag{4.134}$$

tende a um valor mínimo. Pode-se mostrar que a configuração que minimiza a energia potencial, tendo a helicidade magnética constante, é do tipo sem-forças, satisfazendo (4.102) e pressão constante. Em termos matemáticos, deseja-se resolver o seguinte problema variacional [28]

$$\delta W - \frac{\lambda}{2\mu_0} \delta \mathcal{H} = 0, \tag{4.135}$$

onde λ é um multiplicador de Legendre, tal que $\nabla \times \mathbf{B} = \lambda \mathbf{B}$.

Para demonstrar esta afirmação, calculamos separadamente a variação da energia magnética (4.134) e da helicidade (4.124), o que resulta nas expressões

$$\delta W = \frac{1}{\mu_0} \int_V d^3 r \mathbf{B} \cdot \delta \mathbf{B}, \tag{4.136}$$

$$\delta \mathcal{H} = \int_V d^3 r (\delta \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{A} \cdot \delta \mathbf{B}), \tag{4.137}$$

de modo que (4.135) torna-se

$$\int_V d^3r\,[\nabla\cdot(\delta\mathbf{A}\times\mathbf{B})+\delta\mathbf{A}\cdot(\nabla\times\mathbf{B})]-\frac{\lambda}{2}\int_V d^3r\,[\delta\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}+\mathbf{A}\cdot(\nabla\times\delta\mathbf{A})]=0. \tag{4.138}$$

Com o concurso da identidade vetorial

$$\nabla\cdot(\delta\mathbf{A}\times\mathbf{B})=\mathbf{B}\cdot(\nabla\times\delta\mathbf{A})-\delta\mathbf{A}\cdot(\nabla\times\mathbf{B}), \tag{4.139}$$

reescrevemos (4.138) como

$$\oint_S da\hat{\mathbf{n}}\cdot(\delta\mathbf{A}\times\mathbf{B})+\int_V d^3r\,\delta\mathbf{A}\cdot(\nabla\times\mathbf{B})-\lambda\int_V d^3r\delta\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}+\frac{\lambda}{2}\oint_S da\hat{\mathbf{n}}\cdot(\delta\mathbf{A}\times\mathbf{A})=0, \tag{4.140}$$

onde foi usado novamente o teorema do divergente. Em vista das condições de contorno (4.132) a integral de superfície anula-se, restando a contribuição

$$\int_V d^3r\,\delta\mathbf{A}\cdot(\nabla\times\mathbf{B}-\lambda\mathbf{B})=0, \tag{4.141}$$

que, para ser identicamente nula, exige que o integrando seja igual a zero, resultando na condição de Taylor $\nabla\times\mathbf{B}=\lambda\mathbf{B}$, como queríamos demonstrar.

4.9 Equilíbrio MHD estacionário

As configurações de equilíbrio MHD estacionário somente impõe que as quantidades físicas de interesse não dependem explicitamente do tempo, podendo apresentar fluxos de plasma com velocidade diferente de zero. Há vários exemplos deste tipo de situação, tanto em plasmas de fusão como em plasmas astrofísicos. Na primeira categoria enquandram-se configurações de equilíbrio MHD com simetria axial que permitem rotações de plasma compatíveis com a equação da continuidade. Vamos abordar brevemente esta situação no Capítulo 6. Um exemplo notável deste tipo de equilíbrio é encontrado no estudo do vento solar.

No início deste capítulo, estudamos o equilíbrio MHD estático de um plasma sob a ação de um campo gravitacional esfericamente simétrico, no contexto de campos sem forças. Vimos que, nessa situação, o modelo de equilíbrio leva a resultados razoáveis para pequenas distâncias, mas que conduzem a resultados inadmissíveis a grandes distâncias, ou seja, a uma densidade de plasma arbitrariamente grande. Um modelo estático mais sofisticado, devido a Chapman, que incorpora efeitos de transferência de energia por condução térmica, também leva a resultados inconsistentes [vide [**?**], seção 12.1]. Portanto, é necessário usar um modelo para o vento solar que incorpore fluxos, numa configuração de equilíbrio MHD estacionário.

As equações para o equilíbrio MHD ideal estacionário são as seguintes

$$\nabla\cdot(\rho\mathbf{v})=0, \tag{4.142}$$

$$\rho(\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{v}=-\nabla p+\mathbf{J}\times\mathbf{B}+\rho\mathbf{g}, \tag{4.143}$$

$$\mathbf{E}=-\mathbf{v}\times\mathbf{J}, \tag{4.144}$$

$$\nabla\times\mathbf{E}=\mathbf{0}, \tag{4.145}$$

$$\nabla\times\mathbf{B}=\mu_0\mathbf{J}, \tag{4.146}$$

complementadas pela equação dos gases ideais

$$p=\frac{\rho k_B T}{m_i}. \tag{4.147}$$

4.9.1 Modelo de Parker para o vento solar

Assim como no modelo estático, supomos campos gravitacional e magnéticos esfericamente simétricos, dados por (4.20) e (4.21), respectivamente. Também consideramos um campo sem-forças, donde a força de Lorentz não aparece na equação de equilíbrio (4.143). Outra suposição já feita anteriormente é a de uma atmosfera isotérmica ($T = T_0$ constante). Finalmente, considerando fluxos radiais de plasma, tais que $\mathbf{v} = v(r)\hat{\mathbf{e}}_r$, a equação de continuidade (4.142) implica que

$$\frac{d}{dr}(r^2 \rho v) = 0, \tag{4.148}$$

de modo que o triplo produto $r^2\rho v$ não depende da coordenada radial. Abrindo a derivada acima concluimos que

$$\frac{d\rho}{dr} = -\frac{\rho}{r^2 v}\frac{d}{dr}(r^2 v). \tag{4.149}$$

Analogamente, substituindo (4.20) em (4.143) obtemos a condição de equilíbrio

$$\rho v \frac{dv}{dr} = -\frac{dp}{dr} - \frac{GM}{r^2}\rho. \tag{4.150}$$

Lembrando que a velocidade do som no plasma é dada por (3.75),

$$v_S = \sqrt{\frac{p}{\rho}} \tag{4.151}$$

onde fizemos $\gamma = 1$ graças à hipótese de um processo isotérmico, reescrevemos (4.150) na forma

$$v\frac{dv}{dr} = -v_S^2 \frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dr} - \frac{GM}{r^2}. \tag{4.152}$$

Usando (4.149) em (4.152) chegamos, após algumas simplificações algébricas, na seguinte expressão

$$\left(v - \frac{v_S^2}{v}\right)\frac{dv}{dr} = \frac{2v_S^2}{r} - \frac{GM}{r^2}. \tag{4.153}$$

que, definindo o raio característico

$$r_c = \frac{GM}{2v_S^2}, \tag{4.154}$$

pode ser reescrita como

$$\left(v - \frac{v_S^2}{v}\right)\frac{dv}{dr} = \frac{2v_S^2}{r^2}(r - r_c). \tag{4.155}$$

Observe que, se $r = r_c$, então para $dv/dr \neq 0$ resulta que $v = v_s$, ou seja, r_c é a distância para a qual a velocidade do fluxo é igual à velocidade do som no plasma. A expressão (4.155) pode ser integrada, separando as variáveis, com o seguinte resultado

$$\left(\frac{v}{v_S}\right)^2 - \ln\left(\frac{v}{v_S}\right)^2 = 4\left(\frac{r}{r_c}\right)^2 + 4\frac{r_c}{r} + C, \tag{4.156}$$

onde C é uma constante de integração. Dependendo do valor de C, há cinco classes diferentes de soluções, ilustradas na Fig. 4.13.

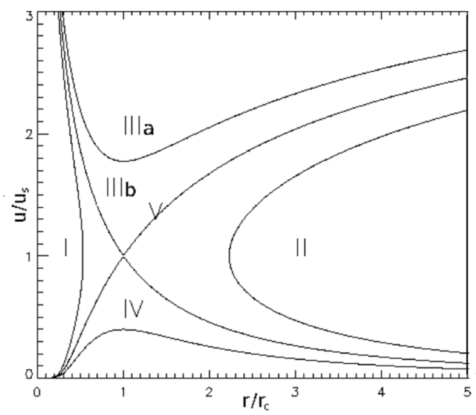

Figura 4.13: Cinco classes diferentes de soluções no modelo de Parker para o vento solar.

1. as soluções I e II apresentam dois valores da velocidade para cada valor do raio, ou seja, v não é univocamente determinada por r, donde são soluções sem interesse físico;

2. as soluções IIIa e IIIb levam a velocidades que tendem a infinito quando o raio tende a zero, não correspondendo ao que se observa na superfície do Sol;

3. a solução IV é tal que, tanto para distâncias muito grandes como muito pequenas (em comparação a r_c, as velocidades são subsônicas ($v < v_S$). É uma solução admissível mas corresponderia a uma "brisa solar";

4. a solução V representa fluxos supersônicos ($v > v_S$) para distâncias grandes do Sol, que podemos associar ao vento Solar. Como esta solução passa pelo ponto crítico de coordenadas (r_c, v_S), é fácil ver que a constante de integração neste caso é $C = -3$.

O trabalho original de Parker, que apresenta este modelo dinâmico para o vento solar, foi publicado em 1958. No ano seguinte, o vento solar foi observado diretamente pelos satélites Lunik III e Venus I. Em princípio não se sabia ao certo se a solução correta seria a de classe IV ou V. Quando o satélite Mariner II detectou, em 1962, velocidades supersônicas para o vento solar, ficou claro que a melhor solução é a de classe V. A velocidade do vento solar na posição da órbita Terrestre (distância de 1 UA) varia de 200 a $900 km/s$. O modelo de Parker foi aperfeiçoado consideravemente nos anos seguintes, permitindo uma descrição mais precisa deste fenômeno [vide [**?**], seção 12.3].

Capítulo 5

Estabilidade MHD

5.1 Conceito geral de estabilidade

Na capítulo anterior tratamos de alguns tipos de equilíbrio MHD com simetria cilíndrica. Ainda que uma condição necessária ao confinamento magnético de plasmas para fusão seja a existência de um equilíbrio MHD, somos obrigados a investigar a estabilidade deste equilíbrio em relação a pequenas perturbações do mesmo. Uma dada configuração de equilíbrio MHD é dita estável se uma pequena perturbação do mesmo conduz a um retorno à situação inicial. Se a perturbação levar a um afastamento da condição de equilíbrio, este será instável.

A teoria da estabilidade MHD é um assunto bastante extenso, do qual faremos um recorte neste capítulo, onde iremos nos concentrar na estabilidade do *screw-pinch* cilíndrico em relação a algumas perturbações do equilíbrio. Como vimos no capítulo anterior, o *screw-pinch* consiste numa coluyna cilíndrica de plasma com uma densidade de corrente J_z ao longo da direção longitudinal. Esta corrente de plasma cria, por sua vez, um campo magnético B_θ na direção azimutal. Além disso, há um campo magnético longitudinal B_z criado por um solenóide externo à coluna de plasma, de modo que as linhas de campo magnético são hélices que jazem sobre superfícies magnéticas cilíndricas coaxiais [Fig. 5.1(a)].

O equilíbrio MHD desta pode ser encarado como a igualdade entre as pressões cinética e magnética em cada ponto da coluna de plasma:

$$p(r) = \frac{B_z^2(r) + B_\theta^2(r)}{2\mu_0}, \qquad (0 \leq r \leq a) \tag{5.1}$$

Para saber se este equilíbrio é ou não estável nós efetuamos uma pequena perturbação na coluna de plasma. Há diversas formas de se fazer isso, mas vamos inicialmente considerar uma perturbação na forma de uma dobra na coluna [Fig. 5.1(b)]. Na parte côncava da coluna de plasma perturbada as linhas de campo B_θ aproximam-se entre si, enquanto na parte convexa elas se afastam. Assim B_θ é ligeiramente mais intenso na parte côncava do que na parte convexa da dobra, o que faz com que a pressão magnética também seja maior na parte côncava do que na convexa. Isto faz com que o equilíbrio entre as pressões seja rompido, aparecendo uma força resultante sobre a parte côncava da dobra, que tende a fazer a dobra aumentar ainda mais, causando uma instabilidade chamada instabilidade de dobra ("kink").

No *z-pinch*, em que só existe a componente B_θ, podemos dizer que o equilíbrio é instável em relação a esta dobra. No *screw-pinch*, por outro lado, existe também

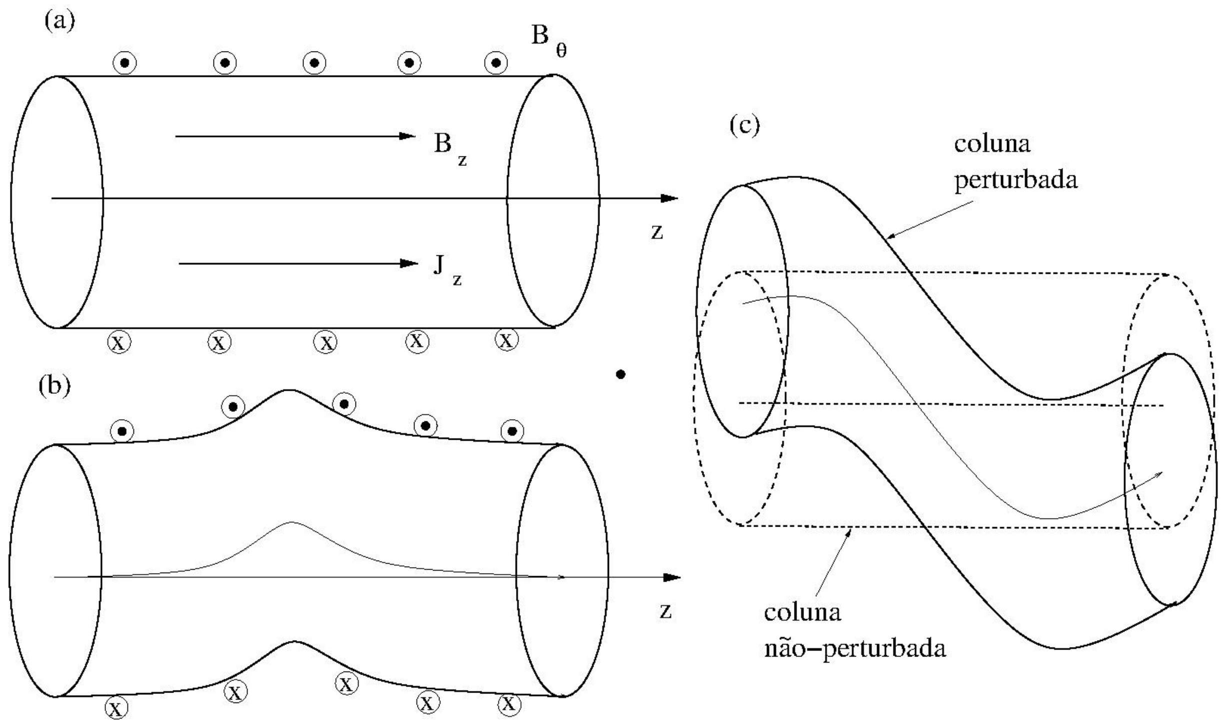

Figura 5.1: (a) Esquema de um *screw-pinch* cilíndrico; (b) Perturbação do tipo dobra; (c) Coluna de plasma perturbada.

um campo longitudinal B_z que, como veremos, melhora a estabilidade da coluna de plasma. Pela discussão que fizemos no Capítulo III, além da pressão existe também uma tensão associada às linhas de campo magnético, que faz com que elas se comportem como fios elásticos. Na MHD ideal, pelo teorema de Alfvén, sabemos que o plasma está vinculado às linhas de campo. Em havendo um dobramento da coluna de plasma também as linhas de campo B_z sofrerão a mesma perturbação e, tal qual fios elásticos, as linhas de campo tendem a se alinhar novamente, trazendo consigo o plasma e contrabalançando o efeito da dobra.

Portanto, o equilíbrio da coluna de plasma será ou não estável dependendo da relação entre os campos B_θ (desestabilizante) e B_z (estabilizante). Pelo mesmo motivo, o *theta-pinch*, onde $B_\theta = 0$, pode ser considerado estável em relação a este dobramento. Alguns autores chamam o *screw-pinch* de *z-pinch* estabilizado. Para o *screw-pinch* as linhas de campo são hélices cilíndricas, fazendo com que a instabilidade de dobra propague-se ao longo das mesmas, de modo que a coluna de plasma também é dobrada helicoidalmente [Fig. 5.1(c)].

Um outro tipo de instabilidade é associada ao estrangulamento da coluna de plasma, chamada instabilidade salsicha ("sausage"). Uma pequena constrição na coluna de plasma faz com que a componente B_θ do campo magnético cresça e aumente a pressão magnética sobre a parte estrangulada [Fig. 5.2(a)], rompendo o equilíbrio e aumentando o próprio estrangulamento até o colapso da coluna de plasma [Fig. 5.2(b)]. Assim como na instabilidade de dobra, no entanto, aqui também a componente B_z desempenha um papel estabilizador, pois o estrangulamento da coluna também comprime as linhas de campo de B_z, que resistem a ele como fios elásticos [Fig. 5.2(c)]. Logo a instabilidade salsicha também pode ou não ocorrer dependendo da relação entre B_z e

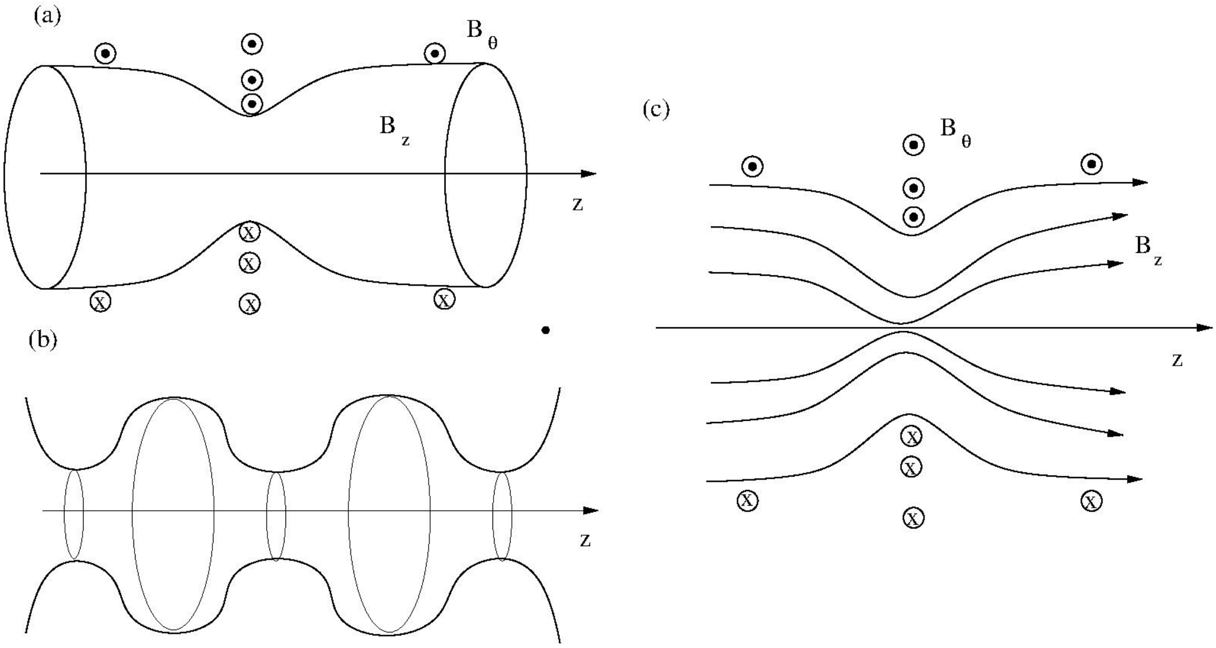

Figura 5.2: (d) Perturbação do tipo estrangulamento da coluna de plasma; (e) Instabilidade do tipo salsicha; (f) Campos magnéticos numa coluna de plasma estrangulada.

B_θ.

A análise matemática da estabilidade será vista nas próximas seções, mas é possível, usando argumentos elementares, obter um critério para a ocorrência da instabilidade salsicha [20]. Seja ξ um pequeno deslocamento radial para dentro da coluna de plasma de raio a [Fig. 5.3(a)]. Pelo teorema de Alvfén podemos impor a conservação do fluxo magnético de B_z ao longo do tubo de fluxo:

$$\Phi_z = B_{z1}\pi a^2 = B_{z2}\pi(a-\xi)^2, \tag{5.2}$$

onde B_{z1} e B_{z2} referem-se, respectivamente, às regiões fora e dentro do estrangulamento. Se $\xi \ll a$ podemos usar o teorema binomial para obter aproximadamente a variação relativa do campo B_z e da respectiva pressão magnética:

$$\frac{\Delta p_{mz}}{p_{mz}} = \frac{2\Delta B_z}{B_{z1}} = \frac{4\xi}{a}. \tag{5.3}$$

O campo azimutal na borda do plasma é dado pela lei de Ampére como $B_\theta(a) = \mu_0 I_p/2\pi a$, onde I_p é a corrente de plasma. Usando novamente o teorema binomial um cálculo simples fornece a variação relativa da pressão magnética associada a esta componente

$$\frac{\Delta p_{m\theta}}{p_{m\theta}} = \frac{2\Delta B_\theta}{B_\theta(a)} = \frac{2\xi}{a}. \tag{5.4}$$

Pela discussão anterior, vimos que para que a coluna de plasma seja estável em relação ao estrangulamento é necessário que a pressão magnética devida a B_z seja maior do que a devida a B_θ. De (5.3) e (5.4) concluimos que o equilíbrio MHD será estável se

$$B_z^2 > \frac{1}{2}B_\theta^2. \tag{5.5}$$

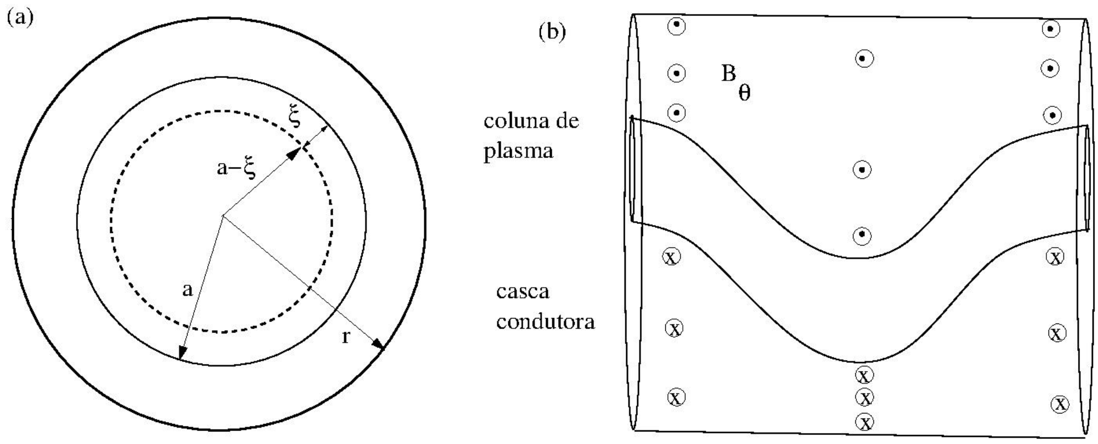

Figura 5.3: (a) Deslocamento radial numa coluna de plasma cilíndrica. (b) Casca cilíndrica condutora e coluna de plasma com instabilidade de dobra.

Outro fator de estabilização da coluna de plasma em relação a perturbações do tipo dobra é a existência de uma casca cilíndrica condutora envolvendo a coluna de plasma [Fig. 5.3(b)]. Nessa situação as linhas de campo B_θ são aprisionada no espaço existente entre o plasma e a parede metálica. Se a coluna de plasma é dobrada de forma a aproximar-se da parede da casca condutora, as linhas de campo ficam mais concentradas nessa região, aumentando a pressão magnética $p_{m\theta}$ e consequentemente provocando o aparecimento de uma força restauradora na direção original da coluna de plasma.

5.2 Equações MHD linearizadas

Neste capítulo vamos considerar apenas a estabilidade MHD no caso ideal, ou seja, sem resistividade do plasma. Sem campos gravitacionais, usamos o conjunto de equações reduzidas da MHD ideal (**??**)-(**??**), a saber

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0, \tag{5.6}$$

$$\rho \left[\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} \right] = -\nabla p + \frac{1}{\mu_0}(\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B}, \tag{5.7}$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}). \tag{5.8}$$

No papel de equação de energia temos duas possibilidades: uma é a equação adiabática (**??**):

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \right) \left(p \rho^{-\gamma} \right) = 0, \tag{5.9}$$

outra é a condição de incompressibilidade do fluido (2.128),

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \tag{5.10}$$

que é característica de um processo isovolumétrico. O critério de escolha entre estas duas alternativas prende-se à velocidade característica de propagação da instabilidade a ser estudada. Se esta for muito maior do que a velocidade das ondas acústicas no plasma (3.75) os processos podem ser considerados adiabáticos, e usamos (5.9). Se, por outro lado, a velocidade for muito menor do que (3.75), podemos usar a condição de incompressibilidade (5.10). Para a instabilidade de dobra, por exemplo, este é o caso que se apresenta, ao qual denominaremos "instabilidade incompressível".

Supomos que a perturbação no deslocamento do plasma é uma função harmônica do tempo, na seguinte forma

$$\boldsymbol{\xi}(\mathbf{r},t) = \boldsymbol{\xi}(\mathbf{r})e^{i\omega t}, \tag{5.11}$$

onde $|\boldsymbol{\xi}| \ll 1$ e ω é a frequência associada à instabilidade. Assim, a perturbação na velocidade do plasma será

$$\mathbf{v} = \frac{\partial \boldsymbol{\xi}}{\partial t} = i\omega \boldsymbol{\xi}(\mathbf{r})\, e^{i\omega t}. \tag{5.12}$$

Consideraremos, analogamente, perturbações nos demais campos escalares e vetoriais da MHD (usaremos, como na seção 3.5, o sufixo 0 para descrever grandezas de equilíbrio, e 1 para pequenas perturbações das mesmas):

$$\rho(\mathbf{r},t) = \rho_0(\mathbf{r}) + \rho_1(\mathbf{r})\, e^{i\omega t}, \tag{5.13}$$

$$p(\mathbf{r},t) = p_0(\mathbf{r}) + p_1(\mathbf{r})\, e^{i\omega t}, \tag{5.14}$$

$$\mathbf{v}(\mathbf{r},t) = 0 + \mathbf{v}_1(\mathbf{r})\, e^{i\omega t}, \tag{5.15}$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r},t) = \mathbf{B}_0(\mathbf{r}) + \mathbf{B}_1(\mathbf{r})\, e^{i\omega t}, \tag{5.16}$$

onde $|\rho_1| \ll \rho_0$, $|p_1| \ll |p_0|$, $|\mathbf{v}_1| \ll 1$ e $|\mathbf{B}_1| \ll |\mathbf{B}_0|$.

Substituindo (5.15) e (5.131) em (5.10) obtemos a condição geral para perturbações incompressíveis:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\xi} = 0. \tag{5.17}$$

Inserindo (5.13) e (5.15) em (5.6) e retendo apenas termos de primeira ordem, obtemos a equação de continuidade linearizada

$$\rho_1 = -\boldsymbol{\xi} \cdot \nabla \rho_0. \tag{5.18}$$

Procedendo analogamente, pela substituição de (5.13)-(5.16) em (5.7) obtemos, em ordem zero de perturbação

$$\frac{1}{\mu_0}(\nabla \times \mathbf{B}_0) \times \mathbf{B}_0 = \mathbf{J}_0 \times \mathbf{B}_0 = \nabla p_0, \tag{5.19}$$

que é simplesmente a condição de equilíbrio magnetostático que exploramos no capítulo anterior. Já em primeira ordem resulta a equação

$$-\rho_0\omega^2 \boldsymbol{\xi} = -\nabla p_1 + \frac{1}{\mu_0}\left[(\nabla \times \mathbf{B}_0) \times \mathbf{B}_1 + (\nabla \times \mathbf{B}_1) \times \mathbf{B}_0\right]. \tag{5.20}$$

Usando a identidade vetorial

$$\nabla(\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{B}_1) = (\nabla \times \mathbf{B}_0) \times \mathbf{B}_1 - (\nabla \times \mathbf{B}_1) \times \mathbf{B}_0 + (\mathbf{B}_1 \cdot \nabla)\mathbf{B}_0 + (\mathbf{B}_0 \cdot \nabla)\mathbf{B}_1, \tag{5.21}$$

podemos reescrever a equação de movimento linearizada (5.20) na forma

$$-\rho_0\omega^2 \boldsymbol{\xi} = -\nabla P_1 + \frac{1}{\mu_0}\left[(\mathbf{B}_1 \cdot \nabla)\mathbf{B}_0 + (\mathbf{B}_0 \cdot \nabla)\mathbf{B}_1\right], \tag{5.22}$$

onde definimos

$$P_1 = p_1 + \frac{1}{\mu_0}\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{B}_1. \tag{5.23}$$

Linearizando a equação (5.8) obtemos

$$\mathbf{B}_1 = \nabla \times (\boldsymbol{\xi} \times \mathbf{B}_0) \tag{5.24}$$

que, para perturbações incompressíveis (5.17), resulta em

$$\mathbf{B}_1 = (\mathbf{B}_0 \cdot \nabla)\,\boldsymbol{\xi} - (\boldsymbol{\xi} \cdot \nabla)\,\mathbf{B}_0, \tag{5.25}$$

onde usamos a lei de Gauss magnética ($\nabla \cdot \mathbf{B}_0 = 0$). Da mesma forma, linearizando (5.9), resulta que, para perturbações incompressíveis

$$p_1 = -\boldsymbol{\xi} \cdot \nabla p_0. \tag{5.26}$$

5.3 Condições de contorno

No estudo da estabilidade MHD há dois tipos de fronteiras: entre o plasma e o vácuo, e entre o vácuo e uma parede sólida condutora. Para empregarmos as equações MHD linearizadas na determinação da estabilidade será, assim, necessário empregar condições de contorno adequadas nestas fronteiras. Vamos relembrar a notação usada no Capítulo 3 para o salto de uma certa quantidade χ através de uma dada fronteira entre dois meios: interior e exterior.

$$[\![\chi]\!] = \chi_{ext} - \chi_{int} \tag{5.27}$$

5.3.1 Lei de Gauss magnética

Seja V o volume de uma "caixa de pílulas Gaussiana" que intercepta a fronteira entre dois meios. Integrando a lei de Gauss magnética e usando o teorema do divergente

$$\int_V d^3r\,\nabla \cdot \mathbf{B} = \oint_S da\,\mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}} = 0, \tag{5.28}$$

onde S é a superfície da caixa de pílulas e $\hat{\mathbf{n}}$ é um vetor unitário apontando da região interior para a exterior (por exemplo, do plasma para o vácuo). Fazendo a altura da caixa tender a zero, obtemos

$$\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{B}_{ext} - \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{B}_{int} = 0, \tag{5.29}$$

ou ainda, com a notação (5.27)

$$[\![\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{B}]\!] = 0, \tag{5.30}$$

ou seja, a componente normal do campo magnético é contínua pela fronteira.

Considere a região interior como sendo um plasma em equilíbrio MHD. Vimos no capítulo anterior que, neste caso, as linhas de campo magnético jazem sobre superfícies magnéticas (isobáricas). Como a fronteira do plasma é, ela própria, uma superfície magnética, resulta que $\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{B}_{int} = 0$, de modo que a condição de contorno simplifica-se ainda mais:

$$\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{B}_{ext} = 0. \tag{5.31}$$

5.3.2 Lei de Ampère

Considerando uma "espira amperiana" retangular C que intercepta perpendicularmente a interface entre dois meios, podemos integral a lei de Ampère (em meios materiais) ao longo da superfície S (aberta) limitada e usar o teorema de Stokes para escrever:

$$\int_S da\,(\nabla\times\mathbf{H})\cdot\hat{\mathbf{n}} = \oint_C \mathbf{H}\cdot d\boldsymbol{\ell} = \int_S da\,\mathbf{J}\cdot\hat{\mathbf{n}}, \tag{5.32}$$

onde $\mathbf{H}$ é a intensidade magnética e $\mathbf{J}$ é uma densidade de corrente que flui exclusivamente na interface entre os meios. Na ausência desta última, e fazendo a largura da espira tender a zero teremos

$$\hat{\mathbf{n}}\times\mathbf{H}_{ext} - \hat{\mathbf{n}}\times\mathbf{H}_{int} = [\![\hat{\mathbf{n}}\times\mathbf{B}]\!] = 0. \tag{5.33}$$

Para o vácuo sabemos que $\mathbf{B} = \mu_0\mathbf{H}$. Já o plasma, embora responda a campos magnéticos, não é considerado, em termos da eletrodinâmica, como um meio magnético, assim como um metal [2]. Logo a relação entre $\mathbf{B}$ e $\mathbf{H}$ acima também será usada para um plasma. Mesmo assim usamos, por empréstimo da física da matéria condensada, os termos "diamagnetismo" e "paramagnetismo" quando estudamos o efeito do plasma sobre o campo magnético aplicado). Dessa forma, a condição de contorno (5.33) nos diz simplesmente que a componente tangencial de $\mathbf{B}$ é contínua pela interface plasma-vácuo.

Para a parede metálica, porém, a relação entre $\mathbf{B}$ e $\mathbf{H}$ pode ser bastante complicada (para uma substância ferromagnética é dada pela curva de histerese). No entanto, considerando um material condutor perfeito (sem resistividade), o campo magnético $\mathbf{B}$ pode ser tomado como sendo igual a zero. Nesse caso a componente tangencial do campo magnético imediatamente fora da parede é nula.

5.3.3 Lei de Ohm generalizada

No caso da MHD ideal ($\eta\to 0$) a lei de Ohm generalizada é

$$\mathbf{E} + \mathbf{v}\times\mathbf{B} = \mathbf{0}. \tag{5.34}$$

Multiplicando vetorialmente por $\hat{\mathbf{n}}$ à esquerda

$$\hat{\mathbf{n}}\times\mathbf{E} = -\hat{\mathbf{n}}\times(\mathbf{v}\times\mathbf{B}) = (\hat{\mathbf{n}}\cdot\mathbf{B})\,\mathbf{v} - (\hat{\mathbf{n}}\cdot\mathbf{v})\,\mathbf{B}. \tag{5.35}$$

5.3.4 Equação do movimento

Voltando à equação MHD do movimento (5.7), e usando a identidade vetorial

$$\nabla(B^2) = 2\,\mathbf{B}\times(\nabla\times\mathbf{B}) + 2\,(\mathbf{B}\cdot\nabla)\mathbf{B}, \tag{5.36}$$

resulta que, usando a definição de derivada material,

$$\rho\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\nabla\left(p + \frac{B^2}{2\mu_0}\right) + \frac{1}{\mu_0}(\mathbf{B}\cdot\nabla)\mathbf{B}. \tag{5.37}$$

Multiplicando escalarmente pelo deslocamento $\delta\mathbf{r}$ e depois fazendo $\delta\mathbf{r}$ tender a zero obtemos

$$\delta\left(p + \frac{B^2}{2\mu_0}\right) = 0, \tag{5.38}$$

ou seja, através da interface temos a continuidade da pressão total (igual à cinética mais a magnética):

$$p_{ext} + \frac{B_{ext}^2}{2\mu_0} = p_{int} + \frac{B_{int}^2}{2\mu_0}. \tag{5.39}$$

5.4 Análise dos modos normais

No estudo da estabilidade MHD apresentam-se três métodos para a determinação da estabilidade de um dado equilíbrio MHD:

- Análise dos modos normais: estudamos a resposta do plasma a uma perturbação infinitesimal do equilíbrio com uma dada frequência, do ponto de vista de um problema de autovalores;
- Método da energia: a resposta do plasma implica em uma variação da energia potencial do sistema;
- Problema de condições iniciais: estuda-se a resposta do plasma diretamente a partir da integração das equações diferenciais do sistema, para um dado conjunto de condições iniciais.

Neste capítulo abordaremos apenas os dois primeiros métodos. Maiores detalhes sobre o estudo da estabilidade MHD podem ser encontrados em obras especializadas, como [**?**, **?**, **?**, **?**].

Na seção anterior exprimimos uma perturbação infinitesimal do equilíbrio na forma

$$\boldsymbol{\xi}(\mathbf{r},t) = \boldsymbol{\xi}(\mathbf{r})\, e^{i\omega t}, \tag{5.40}$$

sendo que a parte espacial satisfaz a equação de movimento linearizada (5.22), que reescrevemos como

$$\rho_0 \omega^2 \boldsymbol{\xi} = \mathbf{F}(\boldsymbol{\xi}), \tag{5.41}$$

onde definimos o campo vetorial

$$\mathbf{F}(\boldsymbol{\xi}) = \nabla P_1 - \frac{1}{\mu_0}\left[(\mathbf{B}_1 \cdot \nabla)\,\mathbf{B}_0 + (\mathbf{B}_0 \cdot \nabla)\,\mathbf{B}_1\right], \tag{5.42}$$

com P_1 dada por (5.23) e $\mathbf{B}_1$ por (5.25) para perturbações incompressíveis.

O campo vetorial (5.99), por sua vez, define um operador linear $\hat{\mathsf{K}}$ agindo no espaço das funções $\boldsymbol{\xi}(\mathbf{r})$ fisicamente admissíveis:

$$\hat{\mathsf{K}}\boldsymbol{\xi} \equiv -\mathbf{F}(\boldsymbol{\xi}), \tag{5.43}$$

de modo que a equação de movimento linearizada (5.41) torna-se uma equação de autovalores para este operador, a saber

$$\rho_0 \omega^2 \boldsymbol{\xi} = -\hat{\mathsf{K}}\boldsymbol{\xi}, \tag{5.44}$$

onde ω^2 é o autovalor correspondente ao autovetor (ou autofunção) $\boldsymbol{\xi}(\mathbf{r})$.

Multiplicando escalarmente (5.44) por $\boldsymbol{\xi}^*(\mathbf{r})$ e integrando em todo o espaço de posição temos

$$\omega^2 = -\frac{\int d^3r\, \boldsymbol{\xi}^* \cdot \hat{\mathsf{K}}\boldsymbol{\xi}}{\int d^3r\, \rho_0 |\boldsymbol{\xi}|^2}. \tag{5.45}$$

Introduzindo a notação de produto interno no espaço de funções

$$(\boldsymbol{\xi},\hat{\mathsf{K}}\boldsymbol{\xi}) = \int d^3r\boldsymbol{\xi}^* \cdot \hat{\mathsf{K}}\boldsymbol{\xi}, \tag{5.46}$$

expressamos o autovalor (5.45) como

$$\omega^2 = -\frac{(\boldsymbol{\xi},\hat{\mathsf{K}}\boldsymbol{\xi})}{(\boldsymbol{\xi},\rho_0\boldsymbol{\xi})}. \tag{5.47}$$

O adjunto hermitiano do operador $\hat{\mathsf{K}}$ no espaço de funções, denotado por $\hat{\mathsf{K}}^\dagger$, é definido pela seguinte propriedade

$$(\boldsymbol{\xi}_1,\hat{\mathsf{K}}\boldsymbol{\xi}_2) = \left(\hat{\mathsf{K}}^\dagger\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2\right). \tag{5.48}$$

Pode-se mostrar que o operador $\hat{\mathsf{K}}$ é auto-adjunto, ou seja, igual ao seu adjunto hermitiano:

$$(\boldsymbol{\xi}_1,\hat{\mathsf{K}}\boldsymbol{\xi}_2) = (\hat{\mathsf{K}}\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2). \tag{5.49}$$

Segundo um teorema bem conhecido da álgebra os autovalores de um operador auto-adjunto são reais. Portanto, em nosso caso ω^2 é um número real. Se $\omega^2 < 0$ então ω é necessariamente um imaginário puro, que escrevemos como $\omega = -i|\omega|$, donde

$$e^{i\omega t} = e^{|\omega|t} \to \infty$$

quando o tempo $t \to \infty$. Logo a perturbação $\boldsymbol{\xi}$ afasta o plasma da situação de equilibrio MHD com o passar do tempo e, em consequência, o modo normal é instável, sendo a sua taxa de crescimento exponencial igual a $|\omega|$. A rigor, como lembra Miyamoto, basta que qualquer um dos autovalores ω^2 seja negativo para termos instabilidade. O plasma só será estável se todos os autovalores ω^2 forem positivos. Resumindo, o critério de estabilidade será

$$\omega^2 < 0, \Rightarrow \text{ o modo é instável.} \tag{5.50}$$

5.5 Estabilidade de um screw-pinch

5.5.1 Perfis de equilíbrio

Como ilustração do critério de estabilidade (5.50) e também como uma importante aplicação da teoria da estabilidade MHD vamos investigar a estabilidade do equilíbrio MHD de um screw-pinch cilíndrico de raio a, tal qual o estudado na seção 4.3.3. A diferença é que anteriormente fizemos a suposição de uma coluna de plasma cilíndrica com uma fronteira bem-definida em $r = a$, ao passo que agora iremos considerar o caso de uma fronteira difusa, ou seja, com um perfil de pressão parabólico:

$$p(r) = \begin{cases} p_0\left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right) & \text{se } r < a \\ 0 & \text{se } r > a. \end{cases} \tag{5.51}$$

assim como também uma densidade de corrente que é uniformemente distribuida na seção reta da coluna de plasma:

$$J_z(r) = \begin{cases} J_0 & \text{se } r < a \\ 0 & \text{se } r > a. \end{cases}, \tag{5.52}$$

tal que a corrente de plasma é obtida por integração como

$$I_p = J_0 \pi a^2. \tag{5.53}$$

Substituindo (5.52) na lei de Ampère resulta na seguinte componente azimutal do campo magnético:

$$B_\theta(r) = \begin{cases} B_{\theta a} \frac{r}{a} & \text{se } r < a \\ B_{\theta a} \frac{a}{r} & \text{se } r > a. \end{cases}, \tag{5.54}$$

onde o campo na borda do plasma é

$$B_{\theta a} = B_\theta(a) = \frac{\mu_0 J_0 a}{2}. \tag{5.55}$$

Inserindo (5.54) na relação de Bennett (4.72) obtemos

$$\frac{d}{dr}\left(p + \frac{B_\theta^2}{\mu_0 r} + \frac{B_z^2}{\mu_0 r}\right) = -\left(\frac{B_\theta^2}{\mu_0}\right), \tag{5.56}$$

e que, integrada, resulta em

$$p + \frac{B_\theta^2}{\mu_0} + \frac{B_z^2}{2\mu_0} = C_1, \tag{5.57}$$

sendo C_1 uma constante de integração.

Como tanto p como B_θ variam com r, podemos dizer que B_z será uma constante, ou seja, não dependerá do raio, de modo que escrevemos

$$p + \frac{B_\theta^2}{\mu_0} = C = C_1 - \frac{B_z^2}{\mu_0}. \tag{5.58}$$

como ilustrado na Fig. 5.4, onde exibimos os perfis radiais da pressão e das componentes do campo magnético. Aplicando esta relação aos pontos $r = 0$ e $r = a$:

$$p(r=0) + \frac{B_\theta^2(r=0)}{\mu_0} = p(r=a) + \frac{B_\theta^2(r=a)}{\mu_0} \tag{5.59}$$

e usando (5.51)-(5.54) temos que

$$B_{\theta a} = \sqrt{p_0 \mu_0}. \tag{5.60}$$

Vimos na introdução deste capítulo que a presença de uma casca cilíndrica condutora exteriormente à coluna de plasma melhora a estabilidade da mesma. Em conformidade com essa expectativa, consideraremos a coluna de plasma de raio $r = a$ sendo envolvida por uma casca condutora perfeita (ou seja, sem resistividade) de raio $r = b > a$.

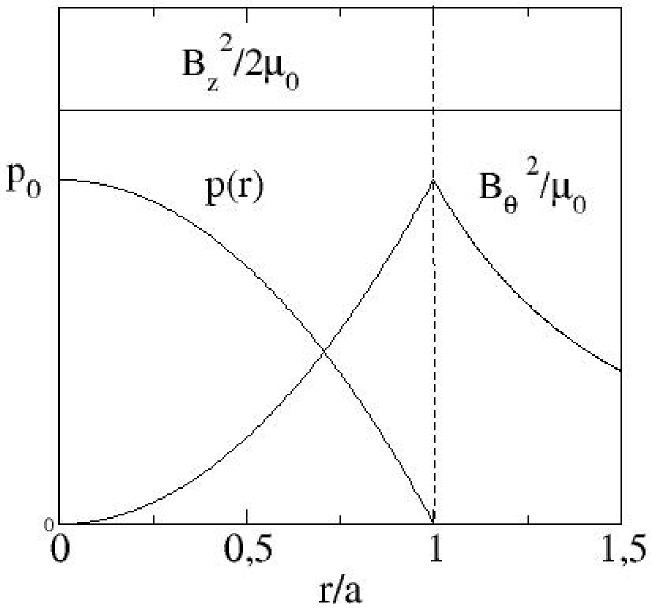

Figura 5.4: Perfis radiais da pressão e das quantidades $B_z^2/2\mu_0$ e B_θ^2/μ_0 para o *screw-pinch*.

5.5.2 Quantidades de primeira ordem

A análise de estabilidade do *screw-pinch* via modos normais começa por escrevermos a perturbação do equilíbrio (5.40) na forma

$$\boldsymbol{\xi}(\mathbf{r},t) = \boldsymbol{\xi}(r,\theta,z)\, e^{i\omega t}. \tag{5.61}$$

No caso do screw-pinch há simetrias tanto azimutal como translacional, de modo que as grandezas de equilíbrio (de ordem zero) não dependem nem de θ nem de z. Supondo uma periodicidade em ambas, as quantidades de primeira ordem poderão ser expandidas em séries de Fourier nas variáveis θ e z. Cada modo normal será identificado pelas respectivas componentes de Fourier:

$$\boldsymbol{\xi}(\mathbf{r},t) = \boldsymbol{\xi}(r)\, e^{i(m\theta+kz+\omega t)}, \tag{5.62}$$

onde m é um inteiro e k é o número de onda na direção z.

Todas as quantidades de primeira ordem dependerão de θ, z e t da mesma forma que em (5.65), de modo que podemos, sempre que cabível, efetuar as seguintes substituições:

$$\frac{\partial}{\partial\theta} \to im, \qquad \frac{\partial}{\partial z} \to ik, \qquad \frac{\partial}{\partial t} \to i\omega. \tag{5.63}$$

Será conveniente definirmos um vetor de propagação da instabilidade como

$$\mathbf{k} = \frac{m}{r}\hat{\mathbf{e}}_\theta + k\hat{\mathbf{e}}_z, \tag{5.64}$$

de forma que (5.65) seja reescrita como

$$\boldsymbol{\xi}(\mathbf{r},t)=\boldsymbol{\xi}(r)\,e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}+\omega t)}. \tag{5.65}$$

Com o auxílio de (5.64) o gradiente de uma quantidade genérica de primeira ordem será expresso como

$$\nabla\rightarrow\hat{\mathbf{e}}_r\frac{\partial}{\partial r}+i\mathbf{k}. \tag{5.66}$$

Por exemplo, a condição de incompressibilidade da perturbação (5.17), com o concurso de (5.66), resulta em

$$i\,\mathbf{k}\cdot\boldsymbol{\xi}=-\frac{\partial\xi_r}{\partial r}. \tag{5.67}$$

A contribuição em primeira ordem para o campo magnético é dada por (5.24)

$$\begin{aligned}\mathbf{B}_1&=\nabla\times(\boldsymbol{\xi}\times\mathbf{B}_0)\\&=\hat{\mathbf{e}}_r\times\frac{\partial}{\partial r}(\boldsymbol{\xi}\times\mathbf{B}_0)+i\mathbf{k}\times(\boldsymbol{\xi}\times\mathbf{B}_0)\\&=\hat{\mathbf{e}}_r\times\left(\frac{\partial\boldsymbol{\xi}}{\partial r}\times\mathbf{B}_0+\boldsymbol{\xi}\times\frac{\partial\mathbf{B}_0}{\partial r}\right)+i\boldsymbol{\xi}(\mathbf{k}\cdot\mathbf{B}_0)-i\mathbf{B}_0(\mathbf{k}\cdot\boldsymbol{\xi})\\&=i\,\boldsymbol{\xi}(\mathbf{k}\cdot\mathbf{B}_0)=i\boldsymbol{\xi}\left(kB_{0z}+\frac{m}{r}B_{0\theta}\right),\end{aligned} \tag{5.68}$$

onde usamos a condição (5.67) e o fato que $B_{0r}=0$.

Separamos, agora, as componentes r, θ e z do campo magnético perturbado e as substituimos na equação de movimento linearizada (5.22). Após uma álgebra tediosa, mas rotineira, chegamos à expressão

$$\mathcal{A}\boldsymbol{\xi}+\mathcal{B}(\hat{\mathbf{e}}_z\times\boldsymbol{\xi})=-\nabla P_1, \tag{5.69}$$

onde definimos (abreviamos $B'_0=dB_{0\theta}/dr$):

$$\mathcal{A}=-\rho\omega^2+\frac{1}{\mu_0}(\mathbf{B}_0\cdot\mathbf{k})^2, \tag{5.70}$$

$$\mathcal{B}=-\frac{2i}{\mu_0}B'_0(\mathbf{B}_0\cdot\mathbf{k}). \tag{5.71}$$

Aplicando o divergente e o rotacional à expressão (5.69) obtemos

$$-\mathcal{B}\,\hat{\mathbf{e}}_z\cdot(\nabla\times\boldsymbol{\xi})=-\nabla^2P_1, \tag{5.72}$$

$$\mathcal{A}\,(\nabla\times\boldsymbol{\xi})-ik\mathcal{B}\boldsymbol{\xi}=0. \tag{5.73}$$

Fazendo o produto escalar de (5.69) com o versor $\hat{\mathbf{e}}_z$ e substituindo o resultado das equações anteriores, chegaremos a uma equação de Helmholtz modificada para P_1:

$$\nabla^2P_1-\frac{\mathcal{B}}{\mathcal{A}}k^2P_1=0. \tag{5.74}$$

Supondo uma solução da forma

$$P_1(\mathbf{r},t)=P_1(r)\,e^{i(kz+m\theta+\omega t)}, \tag{5.75}$$

e substituindo em (5.74), segue que a parte radial satisfaz a seguinte equação diferencial

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dP_1}{dr}\right) - \left[\frac{m^2}{r^2} + k^2\left(1 - \frac{\mathcal{B}}{\mathcal{A}}\right)\right]P_1 = 0. \tag{5.76}$$

Fazendo a mudança da variável independente para $x = k'x$, com

$$k' = k\sqrt{1 + \frac{\mathcal{B}}{\mathcal{A}}},$$

reduzimos a equação (5.76) a uma equação de Bessel modificada

$$\frac{d^2P_1}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{dP_1}{dx} - \left(1 + \frac{m^2}{x^2}\right)P_1 = 0, \tag{5.77}$$

cuja solução geral é a combinação linear das das funções de Bessel modificadas de ordem m, a saber:

$$P_1(x) = c_1 I_m(x) + c_2 K_m(x). \tag{5.78}$$

Desejamos que a pressão não divirja na origem, de modo que é forçoso descartar a solução K_m, fazendo $c_2 = 0$. Assim

$$P_1(r) = c_1 I_m\left(kr\sqrt{1 + \frac{\mathcal{B}}{\mathcal{A}}}\right). \tag{5.79}$$

As componentes radial e polar da equação (5.69) são obtidas efetuando o seu produto escalar com os versores $\hat{\mathbf{e}}_r$ e $\hat{\mathbf{e}}_\theta$, respectivamente, o que nos leva ao sistema linear

$$\mathcal{A}\xi_r - \mathcal{B}\xi_\theta = -\frac{dP_1}{dr}, \tag{5.80}$$

$$\mathcal{A}\xi_r + \mathcal{B}\xi_\theta = -\frac{imP_1}{r}, \tag{5.81}$$

cuja solução é

$$\xi_r = \frac{-1}{\mathcal{A}^2 + \mathcal{B}^2}\left(\mathcal{A}\frac{dP_1}{dr} + \mathcal{B}\frac{imP_1}{r}\right). \tag{5.82}$$

5.5.3 Aplicação das condições de contorno

Temos, agora, que aplicar as condições de contorno nas duas interfaces existentes: (i) a interface plasma-vácuo em $r = a$ e (ii) a interface vácuo-parede condutora em $r = b$. Na Fig. 5.5 representamos esquematicamente a superfície não-perturbada $r - a = 0$, cujo vetor unitário normal é $\hat{\mathbf{n}}_0 = \hat{\mathbf{e}}_r$. Já a superfície perturbada é dada pela equação

$$r = a + \xi_r(a, \theta, z, t), \tag{5.83}$$

e a respectiva normal é dada pelo módulo do seu gradiente

$$\hat{\mathbf{n}} = \left[\frac{\nabla(r - a - \xi_r)}{|\nabla(r - a - \xi_r)|}\right]_{r=a}, \tag{5.84}$$

onde

$$\xi_r = \xi_r(a)\, e^{i(m\theta + kz + \omega t)}. \tag{5.85}$$

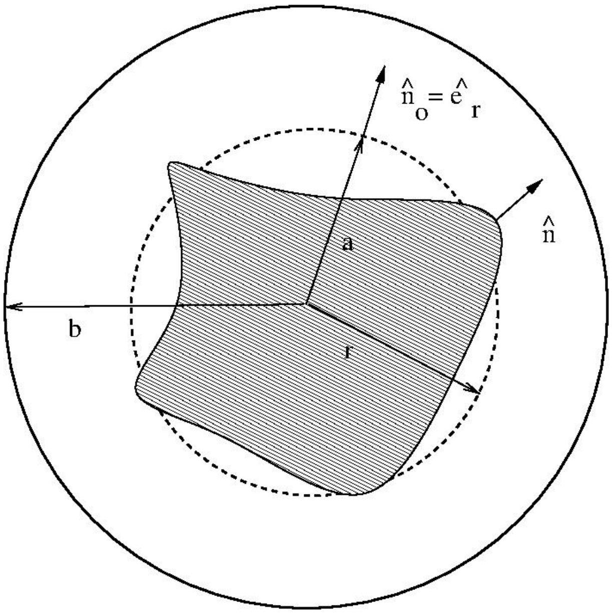

Figura 5.5: Superfícies de contorno perturbada e não-perturbada, com as respectivas normais.

Desprezando termos quadráticos em ξ_r obtemos

$$\hat{\mathbf{n}} = \hat{\mathbf{n}}_0 + \hat{\mathbf{n}}_1 = \hat{r} - i\left(\frac{m}{a}\hat{\mathbf{e}}_\theta + k\hat{\mathbf{e}}_z\right)\xi_r(a). \tag{5.86}$$

Para aplicar as condições de contorno na interface plasma-vácuo, vamos denotar por $\mathbf{B}_{1v}$ o campo magnético perturbado na região de vácuo ($r > a$). Como não existem correntes elétricas fora da coluna de plasma, pela lei de Ampère temos que $\nabla \times \mathbf{B}_{1v} = \mathbf{0}$. Portanto tal campo pode ser obtido como o gradiente de um potencial escalar magnético χ: $\mathbf{B}_{1v} = \nabla\chi$. Da lei de Gauss magnética decorre que este potencial deve satisfazer a equação de Laplace

$$\nabla^2\chi = 0. \tag{5.87}$$

Vamos supor, como de hábito, a seguinte dependência para o potencial escalar magnético:

$$\chi(\mathbf{r},t) = \chi(r)e^{i(m\theta+kz+\omega t)}, \tag{5.88}$$

onde a parte radial satisfaz a seguinte equação (fazendo a mudança de variável $x = kr$):

$$\frac{d^2\chi}{dx^2} - \frac{1}{x}\frac{d\chi}{dr} - \left(1 + \frac{m^2}{x^2}\right)\chi = 0, \tag{5.89}$$

ou seja, novamente recaimos na equação de Bessel modificada, cuja solução geral é

$$\chi(r) = c_3 I_m(kr) + c_4 K_m(kr). \tag{5.90}$$

Tomando seu gradiente temos que

$$\mathbf{B}_{1v} = k\left[c_3 I'_m(kr) + c_4 K'_m(kr)\right]\hat{\mathbf{e}}_r + i\mathbf{k}\chi, \tag{5.91}$$

onde os primos denotam derivação em relação ao respectivo argumento.

A parede é supostamente uma casca metálica de raio $r = b$ com condutividade infinita, donde o campo magnético em seu interior é nulo. Usando a condição de contorno (5.92) na interface vácuo-parede temos

$$\hat{\mathbf{e}}_r \cdot \mathbf{B}_{1v}(r = b) = 0, \tag{5.92}$$

que, em vista de (5.91), leva-nos a

$$c_3 I'_m(kb) + c_4 K'_m(kb) = 0. \tag{5.93}$$

Levando em conta que a a interface plasma-vácuo é a própria fronteira do plasma, aplicando a condição de contorno (6.62) temos que

$$\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{B}_v = (\hat{\mathbf{n}}_0 + \hat{\mathbf{n}}_1) \cdot (\mathbf{B}_{v0} + \mathbf{B}_{v1}) = 0 \tag{5.94}$$

Desprezando termos de segunda ordem teremos

$$\hat{\mathbf{n}}_0 \cdot \mathbf{B}_{v1} + \hat{\mathbf{n}}_1 \cdot \mathbf{B}_{v0} = 0, \qquad (r = a). \tag{5.95}$$

Substituindo (5.86) e denotando $B_{\theta a} = B_{0\theta}(r = a)$ obtemos

$$c_3 k I'_m(ka) + c_4 k K'_m(ka) = i \left(\frac{m}{a} B_{\theta a} + k B_{0z} \right). \tag{5.96}$$

Resolvendo o sistema formado por (5.93) e (5.96) resulta que as constantes de integração em (5.90) são

$$c_3 = -\frac{K'_m(kb)}{I'_m(kb)} c_4, \tag{5.97}$$

$$c_4 = \frac{i\xi_r(a)}{kK'_m(ka) f} \left(\frac{m}{a} B_{\theta a} + k B_{0z} \right), \tag{5.98}$$

onde definimos a seguinte quantidade

$$f = 1 - \frac{I'_m(ka) K'_m(kb)}{I'_m(kb) K'_m(ka)} \tag{5.99}$$

Caso não houvesse a parede condutora, poderíamos fazer o limite $b \to \infty$ em todas as fórmulas anteriores. Usando as expressões assintóticas para as funções de Bessel modificadas, pode-se mostrar que $f \to 1$ neste limite [29].

Aplicando, agora, a condição de contorno (5.39) relacionada à equação de movimento temos, na interface plasma-vácuo, que

$$\frac{B_v^2}{2\mu_0} = p + \frac{B^2}{2\mu_0} \qquad (r = a). \tag{5.100}$$

Dentro e fora do plasma, respectivamente, mas nas vizinhanças da interface, temos que

$$B^2 = B_0^2 + 2\,\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{B}_1, \qquad (r = a + \xi_r^-) \tag{5.101}$$

$$B_v^2 = B_{v0}^2 + 2\,\mathbf{B}_{v0} \cdot \mathbf{B}_{v1}, \qquad (r = a + \xi_r^+), \tag{5.102}$$

onde desprezamos termos de segunda ordem. No mesmo espírito, podemos expandir B_0^2 e B_{v0}^2 em série de Taylor nas vizinhanças de $r = a$, o que resulta em

$$\left(\frac{B^2}{2\mu_0}\right)_{r=a+\xi_r^-} = \frac{B_0^2(a)}{2\mu_0} + \xi_r^-(a)\left(\frac{\partial}{\partial r}\frac{B_0^2}{2\mu_0}\right)_{r=a} + \frac{1}{\mu_0}\mathbf{B}_0(a)\cdot\mathbf{B}_1(a), \tag{5.103}$$

$$\left(\frac{B_v^2}{2\mu_0}\right)_{r=a+\xi_r^+} = \frac{B_{v0}^2(a)}{2\mu_0} + \xi_r^+(a)\left(\frac{\partial}{\partial r}\frac{B_{v0}^2}{2\mu_0}\right)_{r=a} + \frac{1}{\mu_0}\mathbf{B}_0(a)\cdot\mathbf{B}_1(a). \tag{5.104}$$

No mesmo espírito, expandimos a pressão dentro do plasma, porém muito próximo à sua fronteira:

$$p(a+\xi_r^-) = p_0(a) + \xi_r^-(a)\left(\frac{\partial p_0}{\partial r}\right)_a + p_1(a) + \dots. \tag{5.105}$$

Substituindo (5.103), (5.104) e (5.105) em (5.100) chegamos à importante expressão

$$\frac{B_{v0}^2(a)}{2\mu_0} + \xi_r(a)\left(\frac{\partial}{\partial r}\frac{B_{v0}^2}{2\mu_0}\right)_a + \frac{1}{\mu_0}\mathbf{B}_{v0}(a)\cdot\mathbf{B}_{v1}(a) = p_0(a) + \tag{5.106}$$
$$\xi_r(a)\left(\frac{\partial p_0}{\partial r}\right)_a + p_1(a) + \frac{B_0^2(a)}{2\mu_0} + \xi_r(a)\left(\frac{\partial}{\partial r}\frac{B_0^2}{2\mu_0}\right)_a + \frac{1}{\mu_0}\mathbf{B}_0(a)\cdot\mathbf{B}_1(a),$$

5.5.4 Relação de dispersão

Os campos magnéticos não-perturbados dentro de fora do plasma são dados por (5.54), ao passo que a pressão não-perturbada é dada por (5.51). Substituindo-os, bem como as suas derivadas radiais, em (5.106), obtemos

$$\frac{1}{\mu_0}\mathbf{B}_{v0}(a)\cdot\mathbf{B}_{v0}(a) = \frac{1}{\mu_0}\mathbf{B}_0(a)\cdot\mathbf{B}_1(a) + p_1(a) \tag{5.107}$$

O campo magnético perturbado é dado por (5.91), donde

$$\frac{i}{\mu_0}(\mathbf{k}\cdot\mathbf{B}_{0v})_a\,[c_3 I_m(kr) + c_4 K_m(kr)] = \frac{1}{\mu_0}\mathbf{B}_0(a)\cdot\mathbf{B}_1(a) + p_1(a) \tag{5.108}$$

onde os coeficientes são dados por (5.97) e (5.98). De (5.23) temos que

$$P_1(a) = p_1(a) + \frac{1}{\mu_0}\mathbf{B}_0(a)\cdot\mathbf{B}_1(a), \tag{5.109}$$

donde obtemos, finalmente, a expressão

$$-\frac{(\mathbf{k}\cdot\mathbf{B}_{0v})_a^2\xi_r(a)}{\mu_0 k K'_m(ka) f}\left[K_m(ka) - \frac{K'_m(kb)}{I'_m(kb)}I_m(ka)\right] = P_1(a) \tag{5.110}$$

Usando o resultado (5.79) obtemos

$$P_1(a) = c_1 I_m\left(ka\sqrt{1+\frac{\mathcal{B}_a}{\mathcal{A}_a}}\right). \tag{5.111}$$

onde o índice a significa, como de hábito, que as respectivas quantidades devem ser determinadas no ponto $r = a$. Da mesma forma, de (5.82) tiramos

$$\xi_r(a) = \frac{-1}{\mathcal{A}_a^2 + \mathcal{B}_a^2}\left[\mathcal{A}_a\left(\frac{dP_1}{dr}\right)_a + \mathcal{B}_a\frac{imP_1(a)}{a}\right]. \tag{5.112}$$

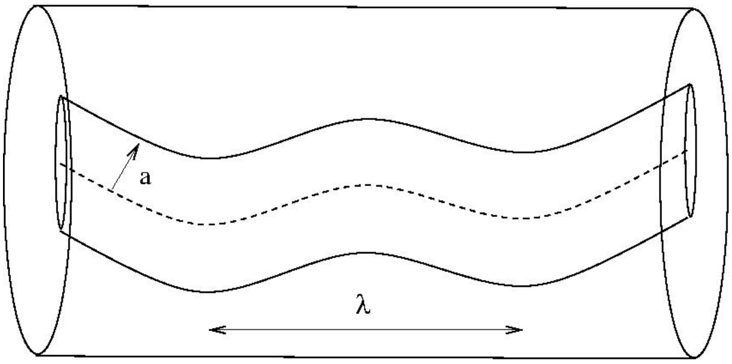

Figura 5.6: Instabilidade de dobra com grande comprimento de onda.

Derivando (5.79) em relação a r e calculando em $r = a$ resulta que (5.110) pode ser reescrita na forma

$$
\begin{aligned}
&-\frac{(\mathbf{k}\cdot\mathbf{B}_{0v})_a^2\xi_r(a)}{\mu_0 k K'_m(ka) f}\left[K_m(ka) - \frac{K'_m(kb)}{I'_m(kb)}I_m(ka)\right]\times \\
&\left[-\mathcal{A}_a k\sqrt{1+\frac{\mathcal{B}_a^2}{\mathcal{A}_a^2}}\frac{I'_m(ka\gamma)}{I_m(ka\gamma)} - \frac{im}{a}\mathcal{B}_a\right] = \mathcal{A}_a^2 + \mathcal{B}_a^2,
\end{aligned} \tag{5.113}
$$

onde ω aparece implicitamente na definição dos termos $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$, dadas por (5.70) e (5.71), respectivamente.

Podemos, assim, interpretar (5.113) como uma relação de dispersão, a qual é uma equação transcendente cujas raízes correspondem aos autovalores temporais da perturbação ω. Infelizmente a equação (5.113) não tem solução analítica exata. Podemos resolvê-la numericamente para quaisquer conjuntos de parâmetros, mas é interessante abordar um caso onde é possível obter uma solução analítica aproximada. Este caso corresponde a instabilidades com um grande comprimento de onda, o que é usualmente verdadeiro para instabilidades de dobra.

Consideremos uma coluna de plasma de raio a que dobra-se na forma de uma onda com comprimento de onda $\lambda = 2\pi/k$ [Fig. 5.6]. Na aproximação de grande comprimento de onda $\lambda \gg a$ ou seja $ka \ll 1$. Da mesma forma, se a casca condutora (em $r = b$) estiver suficientemente próxima da coluna de plasma, podemos considerar $kb \ll 1$. Estas aproximações nos habilitam a empregar as formas assintóticas das funções de Bessel modificadas [?]

$$
\begin{aligned}
I_m(x) &\approx \frac{2^{-m}}{\Gamma(m+1)}x^m, \qquad (x \ll 1) && (5.114)\\
K_m(x) &\approx 2^{m-1}\Gamma(m)x^{-m}, \qquad (m \neq 0, x \ll 1) && (5.115)\\
K_0(x) &\approx -\ln\left(\frac{x}{2}\right) - 0,5722\ldots, \qquad (x \ll 1) && (5.116)
\end{aligned}
$$

de forma que, após uma álgebra um pouco trabalhosa, a relação de dispersão assume a forma

$$
-\frac{(\mathbf{k}\cdot\mathbf{B}_{0v})_a^2}{\mu_0}\left[\frac{1+\left(\frac{a}{b}\right)^{2m}}{1-\left(\frac{a}{b}\right)^{2m}}\right](\mathcal{A}_a + i\mathcal{B}_a) = \mathcal{A}_a^2 + \mathcal{B}_a^2. \tag{5.117}
$$

Usando, agora, (5.70) e (5.71) para calcular $\mathcal{A}_a$ e $\mathcal{B}_a$, respectivamente, podemos reescrever a relação de dispersão (no limite de grandes comprimentos de onda) numa forma em que as frequências aparecem de forma explícita:

$$\omega^2 = -\frac{2B_{\theta a}^2}{\mu_0 \rho_0 a^2} \left\{ \left(m + \frac{kaB_{0z}}{B_{\theta a}} \right) - \left(m + \frac{kaB_{0z}}{B_{\theta a}} \right)^2 \left[1 - \left(\frac{a}{b} \right)^{2m} \right]^{-1} \right\} \tag{5.118}$$

Para valores fixos de m e k, a quantidade ω^2 pode ser negativa dependendo dos valores relativos de a/b e da razão $B_{0z}/B_{\theta a}$. Usando o fator de segurança cilíndrico definido em (6.18) para os campos não-perturbados temos

$$q_c(r) = \frac{rB_{0z}}{LB_{0\theta}}, \tag{5.119}$$

onde L é o comprimento da coluna de plasma. Na sua fronteira teremos, pois,

$$q_c(a) = \frac{aB_{0z}(a)}{LB_{\theta a}}, \tag{5.120}$$

de forma que a relação de dispersão ainda pode ser escrita como

$$\omega^2 = -\frac{2B_{\theta a}^2}{\mu_0 \rho_0 a^2} \left\{ (m + kLq_c(a)) - (m + kLq_c(a))^2 \left[1 - \left(\frac{a}{b} \right)^{2m} \right]^{-1} \right\} \tag{5.121}$$

5.5.5 Análise da estabilidade

Como vimos anteriormente, o equilíbrio MHD será estável se todos os autovalores ω^2 forem positivos. Caso algum $\omega^2 < 0$ o equilíbrio já é considerado instável. De (5.121) temos que a condição para que o equilíbrio seja instável é a de que o termo entre chaves seja positivo, ou seja,

$$(m + kLq_c(a)) - (m + kLq_c(a))^2 \left[1 - \left(\frac{a}{b} \right)^{2m} \right]^{-1} > 0 \tag{5.122}$$

que podemos escrever como uma inequação quadrática na variável $\chi = m + kLq_c(a)$

$$\chi^2 - 2\chi < 0. \tag{5.123}$$

Da álgebra elementar sabemos que as soluções de (5.123) devem estar entre as raizes $\chi_1 = 0$ e $\chi_1 = 2$, ou seja

$$m - 1 + \left(\frac{a}{b} \right)^{2m} < -kLq_c(a) < m \tag{5.124}$$

É importante observar que, se $m = -kLq_c(a)$, a relação de dispersão (5.121) fornece $\omega = 0$. Para interpretar este resultado, lembramos que a perturbação na coluna de plasma tem uma dependência do tipo $\exp[i(m\theta + kz + \omega t)]$, de modo que $\omega = 0$ significa que a perturbação não se altera com o tempo neste caso. Além disso, como o fator de segurança é dado por (6.18) temos

$$Lq_c(a) = \left(\frac{dz}{d\theta} \right)_a = -\frac{m}{k}, \tag{5.125}$$

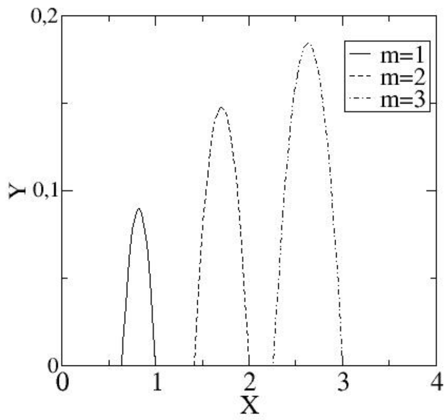

Figura 5.7: Taxa de crescimento (quadrática) da instabilidade de dobra em função do parâmetro $-kLq_c(a)$ para alguns valores de m. Usamos que $1/b = 0,8$.

sobre a superfície $r = a$, de sorte que $md\theta + kdz = 0$. Portanto a perturbação também não se altera com θ e z, não sendo portanto distorcida. Dizemos, neste caso, que a perturbação é ressonante com as linhas de campo magnético sobre a superfície $r = a$.

A taxa de crescimento do modo de dobra com m qualquer é $|\omega|$, tal que $|\omega^2| = -\omega^2$. Vamos chamar $Y = -(\mu_0\rho_0 a^2/2B_{\theta_a}^2)\omega^2$ a taxa quadrática de crescimento, e $X = -kLq_c(a)$. Com estas abreviações a relação de dispersão fica

$$Y = (m - X) - (m - X)^2 \left[1 - \left(\frac{a}{b}\right)^{2m}\right]^{-1}, \tag{5.126}$$

cujo gráfico é uma parábola com a concavidade para baixo, passando pelos pontos $(m, 0)$ e $(X_0, 0)$ [Fig. 5.7], onde

$$X_0 = m - \Delta = m - 1 + \left(\frac{a}{b}\right)^{2m}.$$

A região de instabilidade do modo de dobra é o trecho hachurado correspondendo ao interior da parábola limitado pelo eixo horizontal. A largura desta região será Δ, de modo que, quanto mais próxima a casca condutora estiver do plasma ($b \gtrsim a$) menor será o fator Δ e tanto mais estreita será a região de estabilidade [Fig. 5.7]. Isto ilustra de forma quantitativa o efeito estabilizador da casca condutora sobre a coluna de plasma, ao qual nos referimos no início deste Capítulo. O valor máximo da taxa de crescimento pode ser obtido a partir de (5.126), tal que a frequência a ela correspondente seja dada por

$$\omega_{max}^2 = -\frac{B_{\theta a}^2}{2\mu_0\rho_0 a^2}\left[1 - \left(\frac{a}{b}\right)^{2m}\right] \tag{5.127}$$

Outra conclusão que podemos tirar da Fig. 5.7 é a de que, para uma razão a/b fixa, quanto maior o valor do número inteiro m, maior será a taxa de crescimento da instabilidade, ainda que menor seja o intervalo de valores de $kq_c(a)$ para isso. A instabilidade de dobra mais problemática é aquela para a qual $m = 1$. O intervalo de valores para que ela ocorra é

$$\left(\frac{a}{b}\right)^2 < -kLq_c(a) < 1. \tag{5.128}$$

Se $-kL = 1$ e $b \to \infty$ (ausência de casca condutora) temos que $0 < q_c(a) < 1$ para que o modo seja instável (limite de Kruskal-Shafranov) [32]. Portanto, para que não haja esta instabilidade, devemos ter a condição $q_c(a) > 1$. De (5.120) temos, então, que deve ser satisfeita a desigualdade

$$B_{\theta a} < \frac{a}{L} B_{0z}. \tag{5.129}$$

Supondo, como é habitual, um campo uniforme na direção z com módulo B_0 e usando $B_{\theta a} = \mu_0 I_p / 2\pi a$, onde I_p é a corrente de plasma, a condição (5.129) representa uma limitação para a mesma:

$$I_p < \frac{2\pi a^2 B_0}{\mu_0 L}. \tag{5.130}$$

Por exemplo, se $B_0 \sim 1T$, $a \sim 1m$ e $L \sim 10m$, a corrente de plasma não pode ser maior do que $0,5MA$. Do ponto de vista da fusão termonuclear controlada, esta é uma limitação bastante séria, pois a potência de fusão depende crucialmente da corrente de plasma, que não pode - como vimos - ser aumentada ilimitadamente.

5.6 O princípio da energia

5.6.1 Forma geral

Na análise dos modos normais nós trabalhamos com uma perturbação da forma (5.40), que associamos a uma velocidade

$$\mathbf{v} = \frac{\partial \boldsymbol{\xi}}{\partial t} = i\omega \boldsymbol{\xi}, \tag{5.131}$$

de forma que a perturbação corresponderá a uma variação na energia cinética do plasma, dada por

$$\delta T = \frac{1}{2} \int d^3 r \rho_0 v^2 = \frac{1}{2} \int d^3 r \rho_0 \omega^2 |\boldsymbol{\xi}|^2. \tag{5.132}$$

Como, na equação do movimento (5.41), o campo vetorial $\mathbf{F}(\boldsymbol{\xi})$ tem dimensões de força, podemos associar a perturbação a uma variação na energia potencial do sistema

$$\delta W = -\frac{1}{2} \int d^3 r \boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{F}(\boldsymbol{\xi}) = \frac{1}{2} \left(\boldsymbol{\xi}, \hat{K} \boldsymbol{\xi} \right), \tag{5.133}$$

onde usamos a definição (5.46). Multiplicando a equação de autovalores (5.44) por $\boldsymbol{\xi}^*$ e integrando em todo o espaço obtemos

$$\int d^3 r \rho_0 \omega^2 |\boldsymbol{\xi}|^2 = -\left(\boldsymbol{\xi}, \hat{K} \boldsymbol{\xi} \right),$$

ou seja

$$\delta T = -\delta W. \tag{5.134}$$

Se δW é negativo, então $\delta T > 0$, e haverá um aumento na energia cinética do plasma, significando que a perturbação leva a um deslocamento que se propaga: o equilíbrio MHD será, portanto, instável. De forma similar, se δW é positivo, então $\delta T < 0$ e a energia cinética irá diminuir, levando a um decréscimo na propagação da perturbação, o que torna estável o equilíbrio MHD. Numa interpretação termodinâmica, encarando

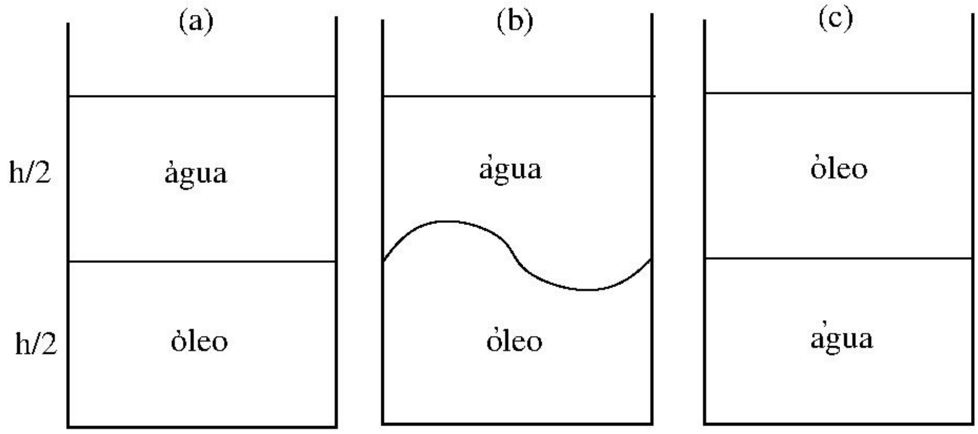

Figura 5.8: Instabilidade de Rayleigh-Taylor numa interface água-óleo.

δW como a variação da energia livre do sistema, caso $\delta W < 0$ então haverá energia cinética disponível para alimentar esta instabilidade. Do ponto de vista rigoroso, pode-se mostrar que $\delta W < 0$ é uma condição necessária e suficiente para a existência de uma instabilidade MHD [31]. Uma prova da suficiência pode ser encontrada em [30].

O princípio de energia é também utilizado para fluidos de maneira geral, e pode ser ilustrado de maneira bastante eloquente pela chamada instabilidade de Rayleigh-Taylor [30]. Consideremos um recipiente contendo uma certa quantidade de óleo (com densidade ρ_2) e, acima dela, o mesmo volume de água (com densidade $\rho_1 > \rho_2$), com uma interface plana entre os dois [Fig. 5.8(a)]. Este sistema, embora em equilíbrio hidrodinâmico, é altamente instável a qualquer perturbação na interface do sistema, que é amplificada com o tempo [Fig. 5.8(b)], de maneira que o sistema finalmente atingirá nova situação de equilíbrio, só que com a camada de óleo acima da de água [Fig. 5.8(c)]. Na situação inicial a energia potencial gravitacional do sistema é

$$W_i = \frac{h^2 S g}{2}(\rho_2 + 3\rho_1), \tag{5.135}$$

onde $h/2$ é a altura de cada camada, S a área da seção reta do recipiente e g a aceleração da gravidade. Já na situação final a energia tem a mesma expressão, com ρ_1 substituido por ρ_2 e *vice-versa*, de modo que a variação da energia potencial será

$$\delta W = W_f - W_i = (\rho_2 - \rho_1) h^2 S g < 0, \tag{5.136}$$

já que $\rho_2 < \rho_1$, de modo que a configuração de equilíbrio inicial é, de fato, instável.

5.6.2 Princípio da energia na MHD

Voltando, agora, para o caso do equilíbrio MHD, escrevemos o campo vetorial (5.99) na seguinte forma

$$\mathbf{F}(\boldsymbol{\xi}) = \nabla p_1 - \frac{1}{\mu_0}\left[\mathbf{B}_0 \times (\nabla \mathbf{B}_1) - (\nabla \times \mathbf{B}_0) \times \mathbf{B}_1\right], \tag{5.137}$$

onde $\mathbf{B}_1$ e p_1 são dadas por (5.24) e (5.26), respectivamente. Da lei de Ampère

$$\mathbf{J}_0 = \frac{1}{\mu_0}\nabla \times \mathbf{B}_0, \tag{5.138}$$

de modo que, fazendo o produto escalar de (5.137) com a perturbação $\boldsymbol{\xi}$ e substituindo o resultado na expressão (5.133) obtemos

$$2\delta W = \underbrace{\int d^3r\,\boldsymbol{\xi}\cdot\nabla p_1}_{=I} + \frac{1}{\mu_0}\underbrace{\int d^3r\,(\boldsymbol{\xi}\times\mathbf{B}_0)\cdot(\nabla\times\mathbf{B}_1)}_{=II} - \int d^3r\,\boldsymbol{\xi}\cdot(\mathbf{J}_0\times\mathbf{B}_1) \tag{5.139}$$

Usando a condição de incompressibilidade (5.17) e o teorema do divergente resulta que o primeiro termo da expressão acima é

$$I = \oint_S da\, p_1\boldsymbol{\xi}\cdot\hat{\mathbf{n}}, \tag{5.140}$$

onde S é uma superfície fechada que envolve o volume V. Abrindo o produto vetorial no termo II e somando o termo identicamente nulo $-(\mathbf{B}_0\cdot\mathbf{B}_1)(\nabla\cdot\boldsymbol{\xi})$ obtemos, após nova aplicação do teorema do divergente

$$II = \oint_S da\,(\mathbf{B}_0\cdot\mathbf{B}_1)\boldsymbol{\xi}\cdot\hat{\mathbf{n}} + \int d^3r\,[\nabla\times(\boldsymbol{\xi}\times\mathbf{B}_0)]^2, \tag{5.141}$$

onde foram desprezados termos de ordem superior. Inserindo (5.140) e (5.141) em (5.139) temos para a variação da energia potencial do plasma a seguinte expressão

$$\delta W = \frac{1}{2}\oint_S da\,P_1\boldsymbol{\xi}\cdot\hat{\mathbf{n}} + \frac{1}{2\mu_0}\int d^3r\,[\nabla\times(\boldsymbol{\xi}\times\mathbf{B}_0)]^2 - \int d^3r'\,\boldsymbol{\xi}\cdot(\mathbf{J}_0\times\mathbf{B}_1). \tag{5.142}$$

5.6.3 Coluna cilíndrica de plasma

Vamos aplicar o princípio de energia na MHD para estudar a estabilidade de uma coluna cilíndrica de plasma de raio a, envolvida por uma casca condutora de raio b [Fig. 5.9]; problema este que já abordamos do ponto de vista do método dos modos normais. Escrevemos, como antes, o campo magnético na região de vácuo como $\mathbf{B}_v = \mathbf{B}_{0v} + \mathbf{B}_{1v}$, onde $\mathbf{B}_{0v} = (0, B_{0v\theta}(r), B_{0vz})$ e $\mathbf{B}_{1v} = \nabla\times\mathbf{A}_1$.

Aplicando a condição de contorno (5.35) na interface plasma-vácuo em $r = a$ temos, em primeira ordem, que

$$\hat{\mathbf{n}}\times\mathbf{E}_{1v} = -\hat{\mathbf{n}}\times(\mathbf{v}_2\times\mathbf{B}_{0v}) = (\hat{\mathbf{n}}\cdot\mathbf{v}_1)\mathbf{B}_{0v}, \tag{5.143}$$

onde usamos a lei de Ohm generalizada (5.34) e $\hat{\mathbf{n}} = \hat{\mathbf{e}}_r$. Lembrando de (5.131) e que as derivadas em relação ao tempo são substituidas por $i\omega$ em todas as expressões, a lei de Faraday em primeira ordem fornece

$$\nabla\times\mathbf{E}_{1v} = -i\omega\mathbf{B}_{1v} = \nabla\times\mathbf{A}_1, \tag{5.144}$$

donde $\mathbf{E}_{1v} = -i\omega\mathbf{A}_1$, e (6.69) fica

$$\hat{\mathbf{n}}\times\mathbf{A}_1 = -\xi_n\mathbf{B}_{0v}, \tag{5.145}$$

onde abreviamos $\xi_n = \boldsymbol{\xi}\cdot\hat{\mathbf{n}}$.

Fazendo o mesmo na interface vácuo-parede em $r = b$, teremos

$$\hat{\mathbf{m}}\times\mathbf{A}_1 = 0, \tag{5.146}$$

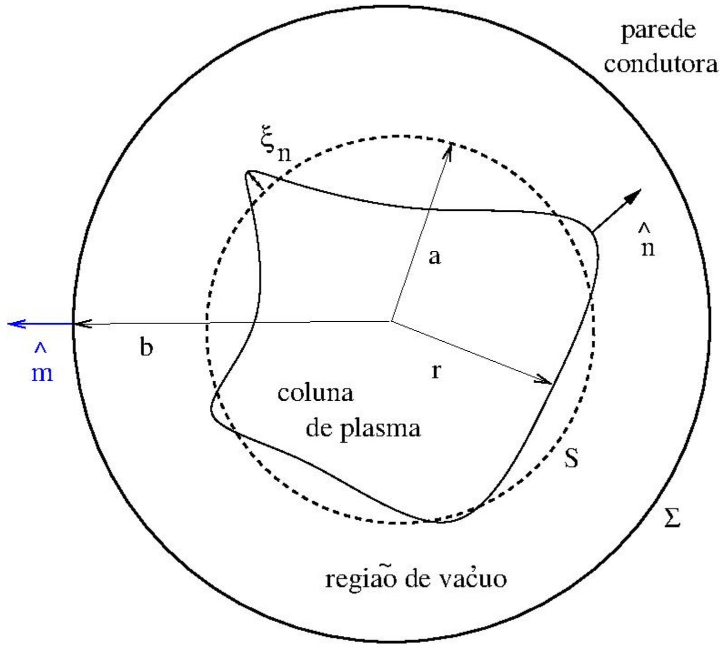

Figura 5.9: Superfícies de contorno para uma coluna cilíndrica de plasma.

onde admitimos que a casca é um condutor perfeito, razão pela qual o campo elétrico em seu interior é nulo. Além disso, supomos que o condutor, mesmo metálico, não tenha propriedades magnéticas que alteram significativamente o resultado.

Aplicamos, agora, a condição de contorno que envolve o equilíbrio das pressões cinética e magnética na fronteira do plasma. Usamos, para isso, (5.106) e reescrevemos as derivadas radiais como $\partial/\partial r = (\hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla)$, donde

$$\underline{\frac{B_{v0}^2(a)}{2\mu_0}} + \xi_n(a)\hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla \left(\frac{B_{v0}^2}{2\mu_0} \right)_a + \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B}_{v0}(a) \cdot \mathbf{B}_{v1}(a) = \underline{p_0(a)} + \tag{5.147}$$
$$\xi_n(a)\, \hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla p_{0_a} + p_1(a) + \frac{B_0^2(a)}{2\mu_0} + \xi_r(a)\hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla \left(\frac{B_0^2}{2\mu_0} \right)_a + \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B}_0(a) \cdot \mathbf{B}_1(a).$$

Em ordem zero os termos sublinhados se anulam. Em primeira ordem, multiplicamos os termos remanescentes por $\xi_n(a)$ e integramos na interface plasma-vácuo S:

$$\oint_S da\, \xi_n^2(a)\hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla \left(p_0 + \frac{B_0^2}{2\mu_0} - \frac{B_{v0}^2}{2\mu_0} \right)_a + \frac{1}{\mu_0} \oint_S da\, \xi_n(a)\mathbf{B}_0(a) \cdot \mathbf{B}_1(a) =$$
$$- \oint_S da\, \xi_n(a) p_1(a) + \frac{1}{\mu_0} \oint_S da\, \xi_n(a)\mathbf{B}_{v0}(a) \cdot \mathbf{B}_{v1}(a). \tag{5.148}$$

A integral no último termo do segundo membro da equação acima pode ser reescrita, usando (6.70), como

$$\oint_S da\, \xi_n(a)\mathbf{B}_{v0}(a) \cdot \mathbf{B}_{v1}(a) = - \oint_S da\, (\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{A}_1) \cdot (\nabla \times \mathbf{A}_1) = \oint_S da\, \hat{\mathbf{n}} \cdot [(\nabla \times \mathbf{A}_1) \times \mathbf{A}_1] \tag{5.149}$$

Sendo Σ a intervace vácuo-parede, $S_t = S \cup \sigma$ é uma superfície fechada que envolve a região de vácuo $\mathcal{V}$ (supondo o cilindro infinitamente longo podemos ignorar a contribuição das suas bases). Usando o teorema do divergente

$$\int_{\mathcal{V}} d^3r \nabla\cdot[(\nabla\times\mathbf{A}_1)\times\mathbf{A}_1] = \int_{S_t} dS\,\hat{\mathbf{n}}\cdot[(\nabla\times\mathbf{A}_1)\times\mathbf{A}_1] = \\ -\int_S da\,\hat{\mathbf{n}}\cdot[(\nabla\times\mathbf{A}_1)\times\mathbf{A}_1] + \int_\Sigma da\,\hat{\mathbf{m}}\cdot[(\nabla\times\mathbf{A}_1)\times\mathbf{A}_1] \tag{5.150}$$

de modo que, em vista da condição de contorno (5.146),

$$\oint_S da\,\xi_n(a)\mathbf{B}_{v0}(a)\cdot\mathbf{B}_{v1}(a) = -\int_{\mathcal{V}} d^3r\nabla\cdot[(\nabla\times\mathbf{A}_1)\times\mathbf{A}_1] + \\ \oint_\Sigma da\,\underbrace{\hat{\mathbf{m}}\cdot[(\nabla\times\mathbf{A}_1)\times\mathbf{A}_1]}_{=0} = -\int_{\mathcal{V}} d^3r\,\mathbf{A}_1\cdot[(\nabla\times\mathbf{A}_1)\times\mathbf{A}_1] + \\ \int_{\mathcal{V}} d^3r\,(\nabla\times\mathbf{A}_1)\cdot(\nabla\times\mathbf{A}_1). \tag{5.151}$$

Na região de vácuo a lei de Ampère fornece

$$\nabla\times\mathbf{B}_{1v} = \nabla\times(\nabla\times\mathbf{A}_1) = \nabla(\nabla\cdot\mathbf{A}_1) - \nabla^2\mathbf{A}_1 = 0, \tag{5.152}$$

Usando a condição de gauge de Lorenz $\nabla\cdot\mathbf{A}_1 = 0$ [20], chegamos a uma equação de Laplace vetorial

$$\nabla^2\mathbf{A}_1 = 0, \tag{5.153}$$

de modo que

$$\mathbf{A}_1\cdot[\nabla\times(\nabla\times\mathbf{A}_1)] = -\mathbf{A}_1\cdot\nabla^2\mathbf{A}_1 = 0,$$

o que simplifica (5.151):

$$\oint_S da\,\xi_n(a)\mathbf{B}_{v0}(a)\cdot\mathbf{B}_{v1}(a) = \int_{\mathcal{V}} d^3r\,(\nabla\times\mathbf{A}_1)^2. \tag{5.154}$$

Substituindo este resultado em (5.148)

$$\oint_S da\,\xi_n^2(a)\hat{\mathbf{n}}\cdot\nabla\left(p_0 + \frac{B_0^2}{2\mu_0} - \frac{B_{v0}^2}{2\mu_0}\right)_a + \frac{1}{\mu_0}\oint_S da\,\xi_n(a)\mathbf{B}_0(a)\cdot\mathbf{B}_1(a) = \\ -\oint_S da\,\xi_n(a)p_1(a) + \frac{1}{\mu_0}\int_{\mathcal{V}} d^3r\,(\nabla\times\mathbf{A}_1)^2. \tag{5.155}$$

Com este resultado, a integral da energia (5.139) fornece

$$\delta W = \frac{1}{2\mu_0}\int_{\mathcal{P}} d^3r\left\{\underbrace{[\nabla\times(\boldsymbol{\xi}\times\mathbf{B}_0)]^2}_{=I} - \underbrace{\boldsymbol{\xi}\cdot\mathbf{J}_0\times[\nabla\times(\boldsymbol{\xi}\times\mathbf{B}_0)]}_{=II}\right\} + \\ \frac{1}{\mu_0}\int_{\mathcal{V}} d^3r\underbrace{(\nabla\times\mathbf{A}_1)^2}_{=III} + \oint_S da\underbrace{\xi_n^2(a)\hat{\mathbf{n}}\cdot\nabla\left(p_0 + \frac{B_0^2}{2\mu_0} - \frac{B_{v0}^2}{2\mu_0}\right)_a}_{=IV}. \tag{5.156}$$

onde o símbolo $\mathcal{P}$ representa a região ocupada pelo plasma.

Pelo princípio da energia, se $\delta W < 0$ a perturbação é instável [31]. Assim, os termos positivos em (5.156) são “estabilizantes”, enquanto os termos negativos são “instabilizantes”. Por exemplo, o termo I é sempre positivo, portanto é estabilizante. Já o termo

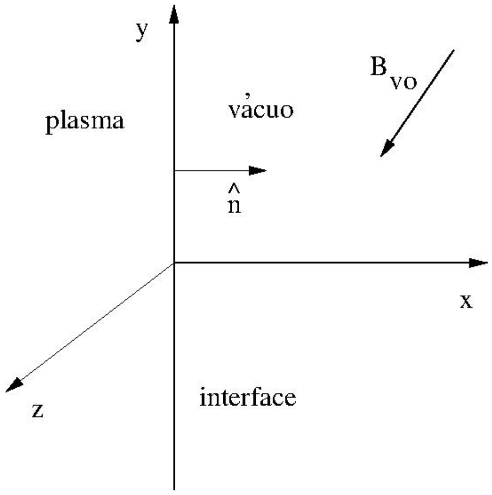

Figura 5.10: Interface plasma-vácuo.

II é tipicamente negativo, sendo associado às chamadas instabilidades produzidas por correntes ("current-driven instabilities"). O termo *III* também é sempre positivo (estabilizante), ao passo que o termo de superfície *IV* pode ser positivo ou negativo, dependendo de $\mathbf{B}_0$ e $\mathbf{B}_{1v}$.

Na análise que fizemos, admitimos que as perturbações são sempre incompressíveis, ou seja, tais que $\nabla \cdot \boldsymbol{\xi} = 0$. No caso mais geral, pode-se mostrar que devemos acrescentar à integral da energia (5.156) o seguinte termo [32]

$$\int_{\mathcal{P}} d^3r \left[(\boldsymbol{\xi} \cdot \nabla) p_0 + \gamma p_0 (\nabla \cdot \boldsymbol{\xi}) \right] (\nabla \cdot \boldsymbol{\xi}), \tag{5.157}$$

o qual, caso seja negativo, estará associado às chamadas instabilidades produzidas pela pressão ("pressure-driven instabilities"). Adicionando (5.157) a (5.156) a integral da energia pode ser reescrita como

$$\delta W = \delta W_p + \delta W_s + \delta W_v, \tag{5.158}$$

onde

$$\begin{aligned}
\delta W_p &= \frac{1}{2\mu_0} \int_{\mathcal{P}} d^3r \, \{ [(\boldsymbol{\xi} \cdot \nabla) p_0 + \gamma p_0 (\nabla \cdot \boldsymbol{\xi})](\nabla \cdot \boldsymbol{\xi}) + \qquad (5.159) \\
&+ [\nabla \times (\boldsymbol{\xi} \times \mathbf{B}_0)]^2 - \boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{J}_0 \times [\nabla \times (\boldsymbol{\xi} \times \mathbf{B}_0)] \Big\} \\
\delta W_s &= \oint_S da \, \xi_n^2(a) \hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla \left(p_0 + \frac{B_0^2}{2\mu_0} - \frac{B_{v0}^2}{2\mu_0} \right)_a \qquad (5.160) \\
\delta W_v &= -\frac{1}{\mu_0} \int_{\mathcal{V}} d^3r \, (\nabla \times \mathbf{A}_1)^2 \qquad (5.161)
\end{aligned}$$

A integral de energia (5.158) pode ser usada para estudar a estabilidade dos modos de dobra, como fizemos na seção anterior com o método dos modos normais [32]. Uma outra aplicação, bem menos trabalhosa, é um plasma com pressão uniforme e localizado no semi-espaço infinito $x < 0$ [33]. O plasma está confinado por um campo magnético $\mathbf{B}_0$ que se anula na região $x < 0$. Nesse caso a corrente de plasma deverá fluir na interface plasma-vácuo [Fig. 5.10].

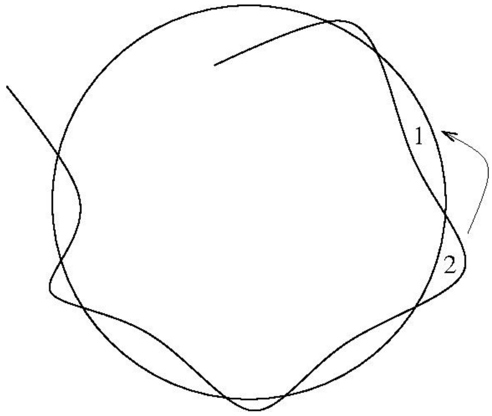

Figura 5.11: Instabilidade de intercâmbio.

Se p_0 é uniforme, então $(\boldsymbol{\xi} \cdot \nabla)p_0 = 0$ no interior do plasma. Como $\mathbf{B}_0 = 0$ teremos então

$$\delta W_p = \frac{1}{2\mu_0} \int_{\mathcal{P}} d^3 r \gamma p_0 (\nabla \cdot \boldsymbol{\xi})^2 \tag{5.162}$$

$$\delta W_s = \oint_S da\, \xi_n^2(a) \hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla \left(\frac{B_{v0}^2}{2\mu_0} \right)_{interface} \tag{5.163}$$

$$\delta W_v = -\frac{1}{\mu_0} \int_{\mathcal{V}} d^3 r (\nabla \times \mathbf{A}_1)^2 \tag{5.164}$$

Como $\delta W_p \geq 0$ e $\delta W_v \geq 0$, então esta configuração será estável se $\delta W_s > 0$. Como $\hat{\mathbf{n}} = \hat{\mathbf{e}}_x$ na interface plasma-vácuo em $x = 0$, temos que

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{B_{v0}^2}{2\mu_0} \right)_{x=0} > 0$$

para que a configuração seja estável. Em outras palavras, é necessário que o campo de vácuo aumente sua intensidade com a distância x à interface. Este é o conceito de "estabilização no campo mínimo": o confinamento de um plasma usando um campo magnético que aumenta com a distância ao plasma.

5.7 Instabilidade de intercâmbio

Outra importante aplicação do princípio de energia é a chamada instabilidade de intercâmbio ("interchange"), que equivale à instabilidade de Rayleigh-Taylor no contexto da MHD ideal. Consideremos uma coluna cilíndrica de plasma na qual o fluxo magnético esteja contido originalmente dentro da coluna de plasma, e próximo à sua fronteira. Supomos, agora, que o fluxo seja deslocado de modo que parte dele fique do lado de fora da fronteira (região 1 na Fig. 5.11). Este fluxo desloca-se para preencher a depressão que fica na fronteira (região 2 na Fig. 5.11). Podemos dizer que há um intercâmbio entre o fluxo magnético e a pressão cinética entre as regiões 1 e 2.

5.7.1 Variação na energia interna

Vamos analisar a instabilidade de intercâmbio através da aplicação do princípio de energia, considerando que há duas contribuições para a energia do plasma: a sua energia interna W_p e sua energia magnética W_m. No capítulo 2 vimos que a energia interna específica (por unidade de massa) do plasma é dada por (2.201). Considerando uma massa unitária, e lembrando que o volume específico é $V = 1/\rho$, teremos

$$W_p = \frac{pV}{\gamma - 1}. \tag{5.165}$$

Na situação inicial mostrada na Fig. 5.11 as regiões 1 e 2 podem ser encaradas como tubos de fluxo, cada qual com uma pressão e um volume específico, de modo que a energia interna correspondente é

$$W_{pi} = \frac{p_1 V_1}{\gamma - 1} + \frac{p_2 V_2}{\gamma - 1}. \tag{5.166}$$

Depois de fazermos o intercâmbio entre as regiões 1 e 2 (ou seja, trocar V_2 por V_1 e vice-versa) teremos

$$W_{pf} = \frac{p'_1 V_1}{\gamma - 1} + \frac{p'_2 V_2}{\gamma - 1}. \tag{5.167}$$

Considerando que o intercâmbio é um processo adiabático, temos que

$$p'_1 = p_2 \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{\gamma}, \qquad p'_2 = p_1 \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma}. \tag{5.168}$$

Substituindo (5.168) em (5.167) temos que a variação de energia interna do plasma é

$$\delta W_p = W_{pf} - W_{pi} = \frac{1}{\gamma - 1}\left(\underbrace{p_2 V_2^{\gamma} V_1^{1-\gamma}}_{=I} + \underbrace{p_1 V_1^{\gamma} V_2^{1-\gamma}}_{=II} - p_1 V_1 - \underbrace{p_2 V_2}_{=III}\right). \tag{5.169}$$

Escrevemos as variações na pressão e no volume específico como quantidades de primeira ordem, ou seja,

$$\begin{aligned} p_2 &= p_1 + \delta p, \qquad (\delta p \ll p_1), && (5.170)\\ V_2 &= V_1 + \delta p, \qquad (\delta V \ll V_1), && (5.171) \end{aligned}$$

de modo que, desprezando termos de terceira ordem ou superiores,

$$\begin{aligned} I &= p_1 V_1 + \gamma p_1 \delta V + V_1 \delta p + \gamma \delta p \delta V + \frac{\gamma(\gamma-1)}{2}\frac{p_1}{V_1}(\delta V)^2, && (5.172)\\ II &= p_1 V_1 + (1-\gamma) p_1 \delta V + \frac{\gamma(\gamma-1)}{2}\frac{p_1}{V_1}(\delta V)^2, && (5.173)\\ III &= p_1 V_1 + p_1 \delta V + V_1 \delta p + \delta p \delta V. && (5.174) \end{aligned}$$

Inserindo estas expansões em (5.169) resulta que a variação da energia interna do plasma é

$$\delta W_p = \delta p \delta V + \gamma \frac{p_1}{V_1}(\delta V)^2. \tag{5.175}$$

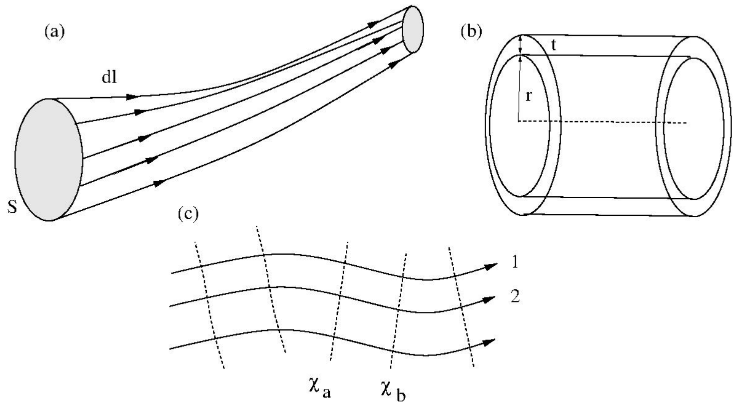

Figura 5.12: (a) Tubo de fluxo magnético; (b) Tubo anelar. (c) Linhas de campo magnético e equipotenciais magnéticas na região de vácuo.

5.7.2 Variação na energia magnética

Sabemos que a energia magnética é dada pela integral da sua densidade sobre o volume de um tubo de fluxo

$$W_m = \int d^3r \frac{B^2}{2\mu_0} = \int d\ell S \frac{B^2}{2\mu_0} \tag{5.176}$$

onde S é a área da seção reta do tubo de fluxo (não necessariamente uniforme) e $d\ell$ é um elemento de comprimento ao longo das linhas de campo que delimitam o tubo de fluxo [Fig. 5.12(a)].

No contexto da MHD ideal podemos usar o teorema de Alfvén, visto no Capítulo 3, que nos assegura ser o fluxo magnético uniforme ao longo de um tubo de fluxo. Em outras palavras o fluxo magnético é $\Phi = \int \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = BS$ em qualquer ponto do tubo de fluxo, cuja energia magnética será portanto

$$W_m = \frac{\Phi^2}{2\mu_0} \int \frac{d\ell}{S}. \tag{5.177}$$

Na configuração inicial (antes do intercâmbio), a energia magnética é

$$W_{mi} = \frac{\Phi_1^2}{2\mu_0} \int_1 \frac{d\ell}{S} + \frac{\Phi_2^2}{2\mu_0} \int_2 \frac{d\ell}{S}, \tag{5.178}$$

ao passo que, após o intercâmbio entre as regiões 1 e 2 da Fig. 5.11,

$$W_{mf} = \frac{\Phi_1^2}{2\mu_0} \int_2 \frac{d\ell}{S} + \frac{\Phi_2^2}{2\mu_0} \int_1 \frac{d\ell}{S}. \tag{5.179}$$

A variação da energia magnética, no caso mais simples onde os fluxos são iguais ($\Phi_1 = \Phi_2$) é $\delta W_m = W_{mf} - W_{mi} = 0$, razao pela qual a variação total de energia reduz-se apenas à variação da energia interna, ou [1]

$$\delta W = \delta W_p + \delta W_m = \delta p \delta V + \gamma \frac{p_1}{V_1} (\delta V)^2. \tag{5.180}$$

[1] Na verdade, o caso $\Phi_1 = \Phi_2$ é o mais perigoso possível do ponto de vista da estabilidade.

A condição para que a configuração seja estável é a de que $\delta W > 0$, donde (5.180) indica que a condição - suficiente porém não necessária - de estabilidade é

$$\delta p\,\delta V > 0. \tag{5.181}$$

5.7.3 Curvaturas boa e ruim das linhas de campo

Como o volume do tubo de fluxo é

$$V = \int S d\ell = \Phi \int \frac{d\ell}{B}, \tag{5.182}$$

a condição de estabilidade (5.181) fica

$$\delta p\,\delta \int \frac{d\ell}{B} > 0. \tag{5.183}$$

Nos perfis que temos utilizado, tanto no Capítulo anterior como neste, a pressão sempre decresce com o aumento de r, de modo que podemos supor $\delta p < 0$ do centro para a periferia da coluna de plasma. Assim, a condição de estabilidade reduz-se a

$$\delta \int \frac{d\ell}{B} < 0. \tag{5.184}$$

No vácuo (ou, em geral, em um plasma com baixos valores de β) não há correntes elétricas, então o campo magnético pode ser escrito como $\mathbf{B} = \nabla\chi$, onde χ é o potencial escalar magnético. Então $\mathbf{B}\cdot \boldsymbol{d\ell} = \nabla\chi \cdot \boldsymbol{d\ell} = d\chi$. Como o elemento de comprimento é escolhido ao longo das linhas de campo, então $Bd\ell = d\chi$. Integrando entre duas equipotenciais (superfícies de $\chi = const.$ [Fig. 5.12(c)] temos

$$\int_a^b B d\ell = \int_a^b d\chi = \chi(b) - \chi(a) = const.$$

donde a integral $\int_a^b B d\ell$ tem o mesmo valor seja qual for o caminho de integração escolhido. Vamos considerar duas linhas de campo, ou seja, dois caminhos infinitamente próximos [Fig. 5.12(c)]. Teremos que $B_1 d\ell_1 = B_2 d\ell_2$, de sorte que

$$\delta(Bd\ell) = B_2 d\ell_2 - B_1 d\ell_1 = 0.$$

Concluimos que

$$\delta\left(\frac{d\ell}{B}\right) = Bd\ell\,\delta\left(\frac{1}{B^2}\right) + \frac{\delta(Bd\ell)}{B^2} = Bd\ell\,\delta\left(\frac{1}{B^2}\right),$$

o que torna a condição de estabilidade (5.184)

$$\delta \int \frac{d\ell}{B} = \int \delta\left(\frac{d\ell}{B}\right) = \int Bd\ell\,\delta\left(\frac{1}{B^2}\right) < 0 \tag{5.185}$$

ou ainda

$$-\int \frac{2\delta B}{B^2} d\ell < 0 \tag{5.186}$$

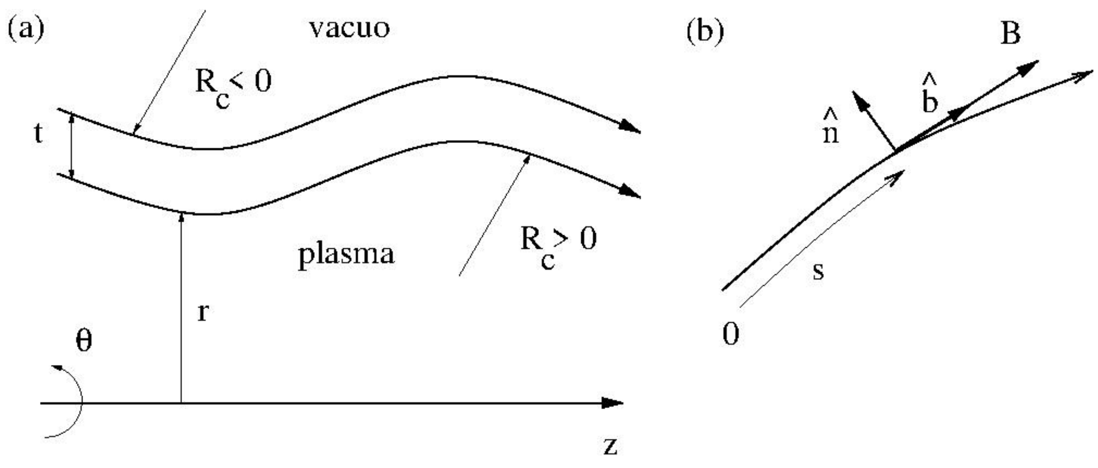

Figura 5.13: (a) Linhas de campo magnético com curvatura positiva e negativa. (b) Definição dos vetores unitários para uma linha de campo.

Para interpretar fisicamente a condição (5.186) vamos considerar a configuração mostrada na Fig. 5.13(a), onde há um campo magnético na região de vácuo tal que as linhas de campo tem trechos com curvatura negativa ($R_c < 0$) e outros com curvatura positiva ($R_c > 0$), em relação ao eixo do sistema. Esta é uma situação bastante comum em sistemas do tipo garrafa magnética. Usando a equação (3.26) do Capítulo 3, o termo associado com a tensão magnética ao longo das linhas de campo é, pelas fórmulas de Frenet-Serret, dado por

$$\frac{1}{B^2}(\mathbf{B}\cdot\nabla)\mathbf{B} = \hat{\mathbf{b}}\frac{1}{B^2}\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{B^2}{2}\right) + \frac{\hat{\mathbf{n}}}{R_c}, \tag{5.187}$$

onde $\hat{\mathbf{n}}$ é o versor normal à linha de campo em um ponto arbitrário situado à distância s de um ponto de referência [Fig. 5.13(b)]. Caso B^2 varie pouco ao longo da linha de campo teremos simplesmente que

$$\frac{1}{B^2}(\mathbf{B}\cdot\nabla)\mathbf{B} \approx \frac{\hat{\mathbf{n}}}{R_c}.$$

de modo que

$$\left|\frac{1}{B^2}(\mathbf{B}\cdot\nabla)\mathbf{B}\right| \sim \frac{\delta B}{B\delta r} = -\frac{1}{R_c},$$

onde o sinal negativo foi introduzido para compatibilizar a relação com a convenção de sinal para o raio de curvatura da Fig. 5.13. Assim

$$\frac{\delta B}{B} \sim -\frac{\delta r}{R_c} = -\frac{t}{R_c},$$

onde t é a distância entre duas linhas de campo próximas [Fig. 5.12(b)]. A essa distância associamos um tubo de fluxo de raio r e espessura t, cuja área da seção reta é $S = (2\pi r)t$, de modo que o fluxo pelo tubo seja $\Phi = B(2\pi r)t$. Substituindo o valor de t assim estimado na condição de estabilidade (5.186), e supondo o fluxo magnético uniforme ao longo da linha de fluxo, chegamos finalmente à condição de estabilidade escrita numa forma de fácil interpretação:

$$\int \frac{d\ell}{rR_cB^2} < 0. \tag{5.188}$$

Caso o raio de curvatura seja negativo (lado “côncavo”) a condição de estabilidade é satisfeita e a coluna de plasma é estável em relação ao intercâmbio dos tubos de fluxo. Como $R_c < 0$ é um fator estabilizante, dizemos que há uma curvatura “boa”. Já se o raio de curvatura seja positivo (lado “côncavo”) temos um fator desestabilizante, e portanto será uma curvatura “ruim”. No caso geral, nós analisamos o gradiente de pressão na coluna de plasma: se o sinal do raio de curvatura se opõe ao sinal do gradiente, é uma curvatura boa, caso contrário é uma curvatura ruim.

Capítulo 6

Equilíbrio MHD em Sistemas com Simetria Axial

No capítulo anterior apresentamos equilÍbrios MHD com simetria translacional, nos quais as equações MHD referem-se apenas a uma coordenada espacial que, no caso de coordenadas cilíndricas-I (r, θ, z), é a coordenada radial r. Para tais equilíbrios as grandezas físicas não dependem das demais coordenadas $(theta, z)$. Por esta razão, tais equilíbrios são chamados unidimensionais [34]. De maior interesse para aplicações em física de plasmas, tanto de fusão como astrofísicos, são os equilíbrios com simetria axial, para os quais existe uma única coordenada ignorável.

Por exemplo, usando coordenadas cilíndricas-II (R, Z, ϕ), a coordenada ignorável é ϕ, de modo que as grandezas físicas dependem das coordenadas (R, Z). Por isso tais equilíbrios são chamados bidimensionais. Por extensão, equilíbrios tridimensionais são aqueles que não têm coordenadas ignoráveis, mas estes não serão objeto de estudo aqui. Neste capítulo iremos desenvolver a teoria dos equilíbrios MHD com simetria axial usando explicitamente o conjunto de coordenadas cilíndricas-II, o que nos levará à equação de Grad-Schlüter-Shafranov.

6.1 Superfícies magnéticas toroidais

A condição fundamental para o equilíbrio MHD ideal é a igualdade entre a força de pressão, que tende a expandir o plasma, e a força magnética, a qual tende a comprimi-lo. Matematicamente temos

$$\nabla p = \mathbf{J} \times \mathbf{B}, \tag{6.1}$$

o que implica em

$$\mathbf{B} \cdot \nabla p = 0, \tag{6.2}$$

ou seja, as linhas de campo magnético jazem sobre superfícies de pressão constante, que chamamos de superfície de fluxo ou superfícies magnéticas. Como $\mathbf{J} \cdot \nabla p = 0$, as linhas de corrente também devem jazer sobre superfícies magnéticas.

Uma condição necessária, embora não suficiente, para o confinamento magnético de plasmas é a existência de superfícies magnéticas fechadas. As linhas de campo magnético jazem sobre tais superfícies. Um teorema devido a Hopf, afirma que se um campo vetorial limitado e diferente de zero jaz sobre uma superfície suave, então tal superfície deve ter a topologia de toros [**?**]. Considerando $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ (ou $\mathbf{J}(\mathbf{r})$) como o campo

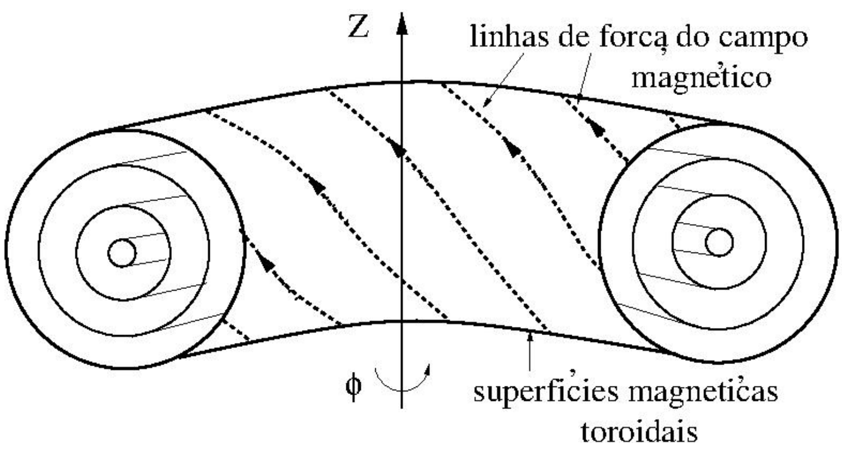

Figura 6.1: Superfícies magnéticas toroidais e linhas de força do campo magnético

vetorial, decorre desse resultado que as linhas de campo magnético devem jazer sobre superfícies magnéticas toroidais.

A superfície magnética degenerada (de volume nulo) é o eixo magnético. O eixo de simetria dos toróides será denominado eixo maior, e a coordenada azimutal $\phi \in [0, 2\pi)$ será dita ângulo toroidal [Fig. 6.1]. A simetria axial implica em que as quantidades físicas relevantes não dependem do ângulo ϕ. Por exemplo, a pressão p - que é constante sobre cada superfície magnética - é tal que $\partial p/\partial\phi = 0$. Outras quantidades também podem ser usadas para caracterizar as superfícies magnéticas toroidais, que chamaremos genericamente de "quantidades de superfície". Além da pressão, o volume limitado por uma superfície toroidal também será uma quantidade de superfície.

Outras quantidades podem ser definidas a partir de fluxos do campo magnético e da densidade de corrente, levando em conta diferentes superfícies de seção. Vamos considerar uma superfície de seção $\phi = const.$, que é um semi-plano contendo o eixo maior e interceptando as superfícies magnéticas na forma de curvas fechadas, como esquematizado na Fig. 6.2(a). Por simplicidade representamos apenas duas destas superfícies, caracterizadas por pressões iguais a p e $p - \Delta p$, respectivamente.

O fluxo toroidal do campo magnético é definido como

$$\Psi_t(p) = \int_{S_t} \mathbf{B} \cdot \mathbf{da_t}, \tag{6.3}$$

onde $\mathbf{da_t}$ é um elemento de área vetorial sobre a superfície de seção $\phi = const.$ e que aponta na direção toroidal (ϕ). Se S_t for a área limitada pela curva fechada correspondente a uma superfície magnética, então Ψ_t é claramente uma função da pressão, donde será uma quantidade de superfície, tal como p.

A direção toroidal corresponde à volta maior ao longo da superfície magnética (em torno do eixo maior do toróide). A volta menor (em torno do eixo magnético) será associada à chamada direção poloidal. O fluxo poloidal do campo magnético será definido por

$$\Psi_p(p) = \int_{S_p} \mathbf{B} \cdot \mathbf{da_p}, \tag{6.4}$$

onde $\mathbf{da_p}$ é um elemento de área vetorial ao longo da direção poloidal, e S_p é a superfície na forma de anel que é limitada pelo eixo magnético e por uma curva perten-

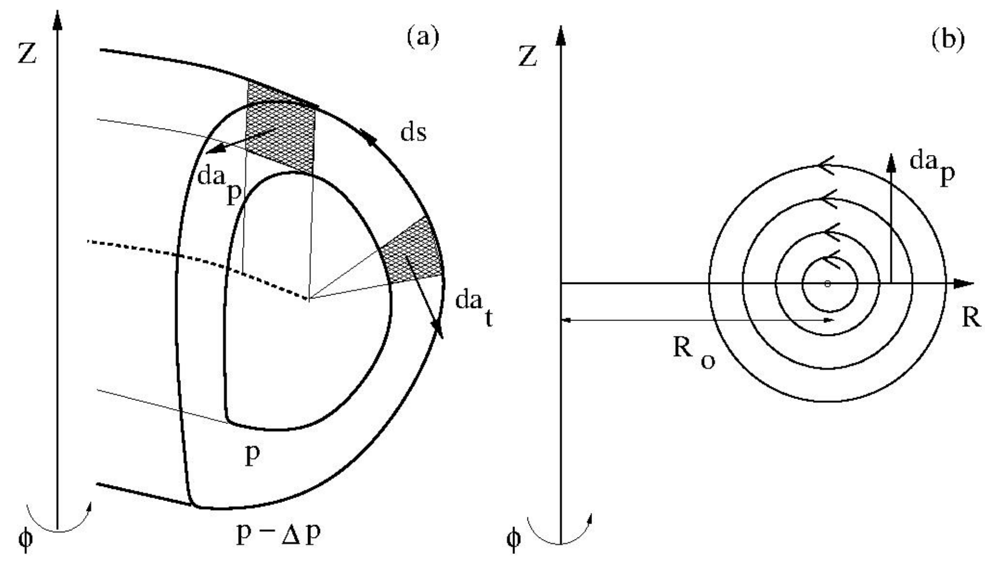

Figura 6.2: (a) Superfícies de seção para cálculo de fluxos. (b) Definição do elemento de área poloidal.

cente à superfície magnética. Pelos mesmos motivos anteriores, o fluxo Ψ_p é também uma quantidade de superfície.

Os fluxos de densidades de corrente correspondem às intensidades de corrente elétrica. De forma análoga definiremos, pois, as correntes toroidal e poloidal como:

$$I_t(p) = \int_{S_t} \mathbf{J} \cdot \mathbf{da_t}, \tag{6.5}$$

$$I_p(p) = \int_{S_p} \mathbf{J} \cdot \mathbf{da_p}, \tag{6.6}$$

e que, como veremos, são quantidades de superfície como as anteriores.

6.2 Função de fluxo poloidal

Vamos decompor o campo magnético (cujas linhas de força são hélices que jazem sobre as superfícies magnéticas toroidais) em componentes nas direções poloidal e toroidal, na forma:

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_p + \mathbf{B}_t = \mathbf{B}_p + B_\phi \, \hat{\mathbf{e}}_\phi. \tag{6.7}$$

Neste capítulo será conveniente o uso das coordenadas cilíndricas-II (R, Z, ϕ), onde Z é a distância medida sobre o eixo maior do toróide, ϕ o ângulo toroidal e R a distância radial medida a partir do eixo Z [Fig. 6.2(b)]. Este sistema difere ligeiramente das coordenadas cilíndricas - I usadas nos capítulos, como exposto no Apêndice B. Neste caso, o campo poloidal terá componentes nas direções R e Z.

A lei de Gauss magnética (4.13) neste sistema de coordenadas se escreve

$$\frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial R}(RB_R) + \frac{\partial B_z}{\partial Z} = 0, \tag{6.8}$$

onde a derivada em ϕ é identicamente nula devido à simetria axial. Vamos definir a chamada função de fluxo poloidal $\Psi(R,Z)$ a partir das seguintes relações:

$$B_R = -\frac{1}{R}\frac{\partial\Psi}{\partial Z} \tag{6.9}$$

$$B_Z = \frac{1}{R}\frac{\partial\Psi}{\partial R}, \tag{6.10}$$

de modo que a condição (6.8) é identicamente satisfeita:

$$-\frac{1}{R}\frac{\partial^2\Psi}{\partial R\partial Z} + \frac{1}{R}\frac{\partial^2\Psi}{\partial Z\partial R} = 0.$$

Escrevendo o campo magnético em termos do potencial vetor, $\mathbf{B} = \nabla\times\mathbf{A}$, e usando a simetria axial, teremos.

$$B_R = -\frac{\partial A_\phi}{\partial Z} \tag{6.11}$$

$$B_Z = \frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial R}\left(RA_\phi\right) \tag{6.12}$$

$$B_\phi = \frac{\partial A_R}{\partial Z} - \frac{\partial A_Z}{\partial R}. \tag{6.13}$$

Comparando (6.11)-(6.12) com (6.9)-(6.10) temos que a função de fluxo poloidal é dada por

$$\Psi(R,Z) = RA_\phi(R,Z). \tag{6.14}$$

Com o auxílio de Ψ representamos o campo poloidal na seguinte forma:

$$\mathbf{B}_p = B_R\,\hat{\mathbf{e}}_R + B_Z\,\hat{\mathbf{e}}_Z = -\frac{1}{R}\frac{\partial\Psi}{\partial Z}\,\hat{\mathbf{e}}_R + \frac{1}{R}\frac{\partial\Psi}{\partial R}\,\hat{\mathbf{e}}_Z = -\frac{1}{R}\nabla\Psi\times\hat{\mathbf{e}}_\phi, \tag{6.15}$$

onde usamos (6.9) e (6.10). Substituindo em (6.7) chegamos à seguinte representação para o campo magnético no caso de simetria axial:

$$\mathbf{B} = -\frac{1}{R}\nabla\Psi\times\hat{\mathbf{e}}_\phi + B_\phi\,\hat{\mathbf{e}}_\phi. \tag{6.16}$$

Para encontrarmos a relação entre Ψ e Ψ_p vamos denotar R_0 a posição radial do eixo magnético em relação ao eixo maior do toróide. Vamos determinar o fluxo magnético poloidal numa superfície situada no plano equatorial ($Z = 0$) do toróide, entre o eixo magnético e uma dada superfície magnética. De (6.4) temos que [Fig. 6.2(b)]

$$\begin{aligned}\Psi_p &= \int \mathbf{B}\cdot d\mathbf{a_p} = \int_{S_p} da\,\mathbf{B}(R', Z=0)\cdot\hat{\mathbf{e}}_Z \\ &= \int_0^{2\pi} d\phi \int_{R_0}^{R} dR'\,R' B_Z(R', Z=0) = 2\pi\Psi(R, Z=0),\end{aligned} \tag{6.17}$$

onde usamos (6.10), bem como o fato de, no eixo magnético, termos $\Psi(R_0, Z=0) = 0$. Concluimos que a função de fluxo poloidal é proporcional ao fluxo magnético poloidal.

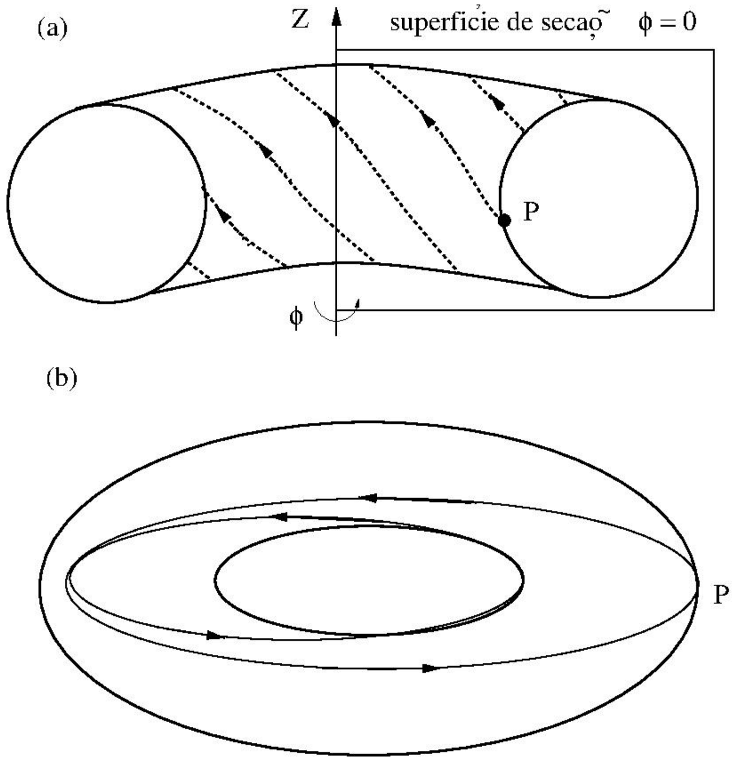

Figura 6.3: (a) Superfície de seção poloidal $\phi = 0$ e linhas de força do campo magnético. (b) Uma superfície racional com $q = 2$.

6.3 Fator de segurança

Devido à condição (6.2), no equilíbrio magnetostático as linhas de força do campo magnético jazem sobre as superfícies magnéticas e têm trajetórias helicoidais [Fig. 6.3(a)]. Em equilíbrios MHD com simetria axial, as superfícies magnéticas têm a forma de toros aninhados, e as linhas de campo percorrem também trajetórias helicoidais em cada toro com passos diferentes, os quais podem ser quantificados por meio de um fator de segurança para a superfície magnética.

Vamos considerar um plano (superfície de seção poloidal) que intercepta as superfícies magnéticas num dado valor do ângulo toroidal, como $\phi = 0$ [Fig. 6.3(a)]. Supondo que a interseção da linha de força com esse plano é um certo ponto P, ela retornará a esse ponto após uma certa variação $\Delta\phi$ do ângulo toroidal. O fator de segurança associado a esta linha de força é definido como [6] [1]

$$q = \frac{\Delta\phi}{2\pi}. \tag{6.18}$$

Por exemplo, se uma linha de força retorna à sua posição P após uma volta completa na direção toroidal, então $\Delta\phi = 2\pi$ ou $q = 1$. Se ela dá duas voltas completas antes de voltar ao ponto P [Fig. 6.3(b)], temos $\Delta\phi = 4\pi$ ou $q = 2$, e assim por diante. Em geral, se esse retorno contece após m voltas completas na direção toroidal e após n voltas completas na direção poloidal (n e m sendo inteiros primos entre si), então $q = m/n$, ou seja, um número racional. Todas as linhas de força sobre esta superfície têm o mesmo valor de q, de modo que a superfície é dita racional.

[1] Costuma-se usar, também, a chamada transformada rotacional, definida como $\iota = 2\pi/q$.

A interseção de uma única linha de força da superfície racional com a superfície de seção é um conjunto discreto de pontos. Se q for um número irracional, contudo, as linhas de força numa dada superfície nunca se fecham sobre si próprias, preenchendo densamente a superfície magnética, que nesse caso é dita irracional. A interseção da linha de força com o plano poloidal preenche, agora, toda a curva fechada.

Por definição, o campo magnético é sempre tangente à uma linha de força em cada um dos seus pontos. Se $\boldsymbol{d\ell}$ é o elemento vetorial de comprimento da linha de força, a equação das linhas de força do campo magnético será,

$$\mathbf{B} \times \boldsymbol{d\ell} = \mathbf{0}. \tag{6.19}$$

Se ds for o elemento de comprimento da linha de força na direção poloidal [Fig. 6.2(a)] enquanto o respectivo deslocamento na direção toroidal é $Rd\phi$, a equação das linhas de força resulta em

$$\frac{Rd\phi}{B_\phi} = \frac{ds}{B_p} \tag{6.20}$$

onde B_p e B_ϕ são as componentes poloidal e toroidal, respectivamente, do campo magnético. Integrando ao longo de um circuito completo ao longo da direção poloidal em torno da superfície magneica temos, usando (6.18) e (6.20)

$$\begin{aligned} \oint d\phi = \Delta\phi = \oint ds \frac{1}{R}\frac{B_\phi}{B_p}, \\ q = \frac{1}{2\pi}\oint ds \frac{1}{R}\frac{B_\phi}{B_p}. \end{aligned} \tag{6.21}$$

É possível, também, derivar uma expressão para o fator de segurança que utiliza os fluxos poloidal e toroidal definidos em (6.4) e (6.3), respectivamente [6]. Considerando um anel elementar entre duas superfícies magnéticas separadas por uma distância local dx, o respectivo elemento de área toroidal será da_t, tal que que o elemento de fluxo toroidal pode ser escrito como [Fig. 6.2(a)]

$$d\Psi_t = B_\phi \, da_t = \oint ds \, (B_\phi dx). \tag{6.22}$$

Já o elemento de área poloidal associado ao anel infinitesimal descrito é denotado da_p, e o elemento de fluxo poloidal será

$$d\Psi_p = B_p \, da_p = B_p (2\pi R) \, dx. \tag{6.23}$$

Eliminando os campos B_p e $B\phi$ em favor dos respectivos elementos de fluxo a eq. (6.21) pode ser reescrita como

$$q = \frac{d\Psi_t}{d\Psi_p}, \tag{6.24}$$

ou seja, q é a taxa de variação de um fluxo em relação a outro.

Vamos considerar um toróide com seção reta circular com raio menor igual a r e raio maior igual a R_0, medido a partir do centro do círculo. A sua razão de aspecto é

$$\mathcal{A} = \frac{R_0}{r}. \tag{6.25}$$

É frequente encontrarmos situações onde tipicamente $r \ll R_0$, de modo que temos uma grande razão de aspecto. Nestes casos podemos, em primeira aproximação, desprezar a curvatura toroidal e considerar um cilindro periódico de comprimento $L = 2\pi R_0$. Fazendo, assim, $R \approx L/2\pi$ a expressão (6.21) será

$$q \approx \frac{1}{2\pi R_0} \oint_C ds \frac{B_\phi}{B_p}. \tag{6.26}$$

Nesta aproximação será mais conveniente empregarmos as coordenadas cilíndricas-I (r, θ, z), tais que $B_\phi \to B_z$, $B_p \to B_\theta$ e $ds = rd\theta$, sendo C um círculo de raio r. Esta configuração pode descrever, por exemplo, um *screw-pinch*, para o qual B_z e B_θ só podem depender, no máximo, da coordenada r, tal que

$$q \approx 2\pi \frac{rB_z}{LB_\theta} = \frac{rB_z}{R_0 B_\theta}. \tag{6.27}$$

Considerando o fator de segurança cilíndrico q_c definido no Cap. 4 por (6.18), teremos que $q = 2\pi q_c$.

O fator de segurança recebe esse nome devido à sua importância na teoria da estabilidade MHD. No Capítulo 5 estudamos a instabilidade de dobra com $m = 1$ em uma coluna cilíndrica de plasma e concluimos, a partir de (5.128), que para que não haja esta instabilidade (que pode gerar perda da coluna de plasma) devemos satisfazer o chamado critério de Kruskal-Shafranov $q_c(a) > 1$.

Em geral, tanto no caso cilíndrico como no toroidal, o fator de segurança depende da coordenada radial, ou seja, o passo das linhas de campo magnético é diferente para cada superfície magnética. A derivada do fator de segurança em relação a esta coordenada é chamada "cizalhamento magnético".

6.4 Operador de Shafranov

Inserindo a representação (6.16) na lei de Ampère (4.12) é

$$\mu_0 \mathbf{J} = \nabla \times \left[-\frac{1}{R} \nabla\Psi \times \hat{\mathbf{e}}_\phi \right] + \nabla \times \left(B_\phi \hat{\mathbf{e}}_\phi \right). \tag{6.28}$$

Usando algumas identidades vetoriais e a simetria axial obtemos, para cada um dos termos do lado direito da expressão acima, que

$$\nabla \times \left[-\frac{1}{R} \nabla\Psi \times \hat{\mathbf{e}}_\phi \right] = \hat{\mathbf{e}}_\phi \left[\frac{1}{R} \nabla^2\Psi - \frac{1}{R^2} \frac{\partial \Psi}{\partial R} \right], \tag{6.29}$$

$$\nabla \times \left(B_\phi \hat{\mathbf{e}}_\phi \right) = \frac{1}{R} \nabla(RB_\phi) \times \hat{\mathbf{e}}_\phi. \tag{6.30}$$

Como

$$\nabla \cdot \left(\frac{1}{R} \nabla\Psi \right) = \frac{1}{R} \nabla^2\Psi - \frac{1}{R^2} \frac{\partial \Psi}{\partial R}$$

podemos reescrever (6.30) e substitui-la, juntamente com (6.29), em (6.28):

$$\mu_0 \mathbf{J} = \nabla \cdot \left(\frac{1}{R} \nabla\Psi \right) \hat{\mathbf{e}}_\phi + \frac{1}{R} \nabla(RB_\phi) \times \hat{\mathbf{e}}_\phi. \tag{6.31}$$

Este resultado sugere que a densidade de corrente também pode ser decomposta em componentes poloidal e toroidal, tal qual fizemos para o campo magnético:

$$\mathbf{J} = \mathbf{J}_p + J_\phi \hat{\mathbf{e}}_\phi. \tag{6.32}$$

Comparando (6.32) com (6.31) encontramos as respectivas componentes:

$$\mu_0 \mathbf{J}_p = \frac{1}{R} \nabla (R B_\phi) \times \hat{\mathbf{e}}_\phi \tag{6.33}$$

$$\mu_0 J_\phi = \nabla \cdot \left(\frac{1}{R} \nabla \Psi \right) \tag{6.34}$$

Definiremos o chamado operador de Shafranov

$$\Delta^* \Psi = R \nabla \cdot \left(\frac{1}{R} \nabla \Psi \right) = R \frac{\partial}{\partial R} \left(\frac{1}{R} \frac{\partial \Psi}{\partial R} \right) + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial Z^2}, \tag{6.35}$$

de sorte que (6.34) é reescrita como

$$\mu_0 J_\phi = \frac{1}{R} \Delta^* \Psi. \tag{6.36}$$

6.5 Função de corrente poloidal

Vimos anteriormente que a condição de equilíbrio MHD (4.11) implica em

$$\mathbf{B} \cdot \nabla p = 0, \tag{6.37}$$

ou seja, as linhas de campo magnético jazem sobre superfícies de pressão constante. De (6.7) isto significa que $\mathbf{B}_p \cdot \nabla p = 0$ devido à simetria axial. Usando (6.15) para o campo poloidal concluimos que

$$\nabla \Psi \times \nabla p = \mathbf{0}. \tag{6.38}$$

Para interpretar esta expressão vamos abrir o produto vetorial entre os dois gradientes, o que resulta

$$\begin{aligned} \nabla \Psi \times \nabla p &= \left(\frac{\partial \Psi}{\partial R} \hat{\mathbf{e}}_R + \frac{\partial \Psi}{\partial Z} \hat{\mathbf{e}}_Z \right) \times \left(\frac{\partial p}{\partial R} \hat{\mathbf{e}}_R + \frac{\partial p}{\partial Z} \hat{\mathbf{e}}_Z \right) \\ &= \left(\frac{\partial \Psi}{\partial R} \frac{\partial p}{\partial Z} - \frac{\partial \Psi}{\partial Z} \frac{\partial p}{\partial R} \right) \hat{\mathbf{e}}_R \end{aligned}$$

de modo que (6.38) resulta em

$$\mathcal{W}(\Psi, p) = \begin{vmatrix} \frac{\partial \Psi}{\partial R} & \frac{\partial \Psi}{\partial Z} \\ \frac{\partial p}{\partial R} & \frac{\partial p}{\partial Z} \end{vmatrix} = 0, \tag{6.39}$$

onde $\mathcal{W}(\Psi, p)$ denota o Wronskiano das funções $\Psi(R, Z)$ e $p(R, Z)$. Quando o Wronskiano é identicamente nulo, como neste caso, as duas funções não são linearmente independentes, ou seja, $p = p(\Psi)$. Portanto tanto Ψ como p são quantidades de superfície, e portanto as superfícies isobáricas coincidem com as superfícies magnéticas. Como consequência

$$\nabla p = \frac{dp}{d\Psi} \nabla \Psi = p'(\Psi) \nabla \Psi, \tag{6.40}$$

onde o primo indica derivada em relação a Ψ.

Sabemos, ainda, que no equilíbrio MHD

$$\mathbf{J} \cdot \nabla p = 0, \tag{6.41}$$

tal que as linhas de corrente também jazem sobre superfícies isobáricas. Entretanto, isso não significa que os vetores **J** e **B** devam ser paralelos. Como vimos no Cap. 3, se houver um gradiente de pressão através das superfícies magnéticas aparecerá uma corrente diamagnética (4.44):

$$\mathbf{J}_\perp = \frac{\mathbf{B} \times \nabla p}{B^2}, \tag{6.42}$$

que é a componente de **J** perpendicular a **B**.

Substituindo (6.32) em (6.41) a densidade de corrente poloidal satisfaz $\mathbf{J}_p \cdot \nabla p = 0$. Usando (6.33) isto implica em

$$\nabla \left(-\frac{RB_\phi}{\mu_0} \right) \times \nabla p = 0. \tag{6.43}$$

Definimos a função de corrente poloidal como

$$I(R,Z) = -\frac{1}{\mu_0} RB_\phi(R,Z), \tag{6.44}$$

de modo que (6.43) torne-se

$$\nabla I \times \nabla p = 0. \tag{6.45}$$

Usando o mesmo raciocínio empregado anteriormente para Ψ concluimos que I também é uma função da pressão, ou seja, é uma quantidade de superfície. Como $p = p(\Psi)$, então também $I = I(\Psi)$ e podemos escrever

$$\nabla I = \frac{dI}{d\Psi} \nabla \Psi = I'(\Psi) \nabla \Psi. \tag{6.46}$$

Como a densidade de corrente poloidal tem componentes R e Z, a relação (6.33) pode ser escrita como

$$\begin{aligned}\mu_0 (J_R \hat{\mathbf{e}}_R + J_Z \hat{\mathbf{e}}_Z) &= \frac{1}{R} \nabla (RB_\phi) \times \hat{\mathbf{e}}_\phi \\ &= -\frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial Z} \left(-\frac{RB_\phi}{\mu_0} \right) \hat{\mathbf{e}}_R + \frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial R} \left(-\frac{RB_\phi}{\mu_0} \right) \hat{\mathbf{e}}_Z,\end{aligned} \tag{6.47}$$

que, em vista de (6.44), fornece as componentes de **J** em função de I:

$$J_R = -\frac{1}{R}\frac{\partial I}{\partial Z} \tag{6.48}$$

$$J_Z = \frac{1}{R}\frac{\partial I}{\partial R}. \tag{6.49}$$

Assim, a representação que usaremos para a densidade de corrente será similar a (6.16):

$$\mathbf{J} = -\frac{1}{R} \nabla I \times \hat{\mathbf{e}}_\phi + J_\phi \hat{\mathbf{e}}_\phi. \tag{6.50}$$

Pela discussão até agora é aparente que Ψ está para **B** como I está para **J**. De fato, calculando o fluxo de corrente poloidal através da mesma superfície S_p usada em (6.17) temos que

$$I_p = 2\pi [I(R, Z=0) - I_{eixo}] \tag{6.51}$$

onde $I_{eixo} = I(R = R_0, Z = 0)$ é o valor de I no eixo magnético.

6.6 Equação de Grad-Schlüter-Shafranov

Substituindo as representações (6.16) para **B** e (6.50) para **J** na condição de equilíbrio MHD (4.11) obtemos

$$
\begin{aligned}
\nabla p &= \mathbf{J} \times \mathbf{B} \\
&= \frac{1}{R^2} \underbrace{(\nabla I \times \hat{\mathbf{e}}_\phi) \times (\nabla \Psi \times \hat{\mathbf{e}}_\phi)}_{=0} - \frac{B_\phi}{R} \underbrace{(\nabla I \times \hat{\mathbf{e}}_\phi) \times \hat{\mathbf{e}}_\phi}_{=-\nabla I} - \\
&\quad \frac{J_\phi}{R} \underbrace{\hat{\mathbf{e}}_\phi \times (\nabla I \times \hat{\mathbf{e}}_\phi)}_{=\nabla \Psi} - J_\phi B_\phi \underbrace{\hat{\mathbf{e}}_\phi \times \hat{\mathbf{e}}_\phi}_{=0}.
\end{aligned}
\tag{6.52}
$$

Usando (6.40) e (6.46) chegamos a uma relação que só envolve o gradiente da função de fluxo:

$$
\left[p'(\Psi) - \frac{B_\phi}{R} I'(\Psi) + \frac{J_\phi}{R} \right] \nabla \Psi = 0, \tag{6.53}
$$

de modo que, se $\nabla \Psi \neq 0$, o termo entre colchetes deve ser identicamente nulo:

$$
p'(\Psi) - \frac{B_\phi}{R} I'(\Psi) + \frac{J_\phi}{R} = 0. \tag{6.54}
$$

Substituindo (6.44) e (6.36) em favor de B_ϕ e J_ϕ, respectivamente, chegamos finalmente à equação de Grad-Shafranov

$$
\Delta^* \Psi = \mu_0 R J_\phi = -\mu_0 R^2 p'(\Psi) - \frac{1}{2} \mu_0^2 (I^2)'(\Psi), \tag{6.55}
$$

ou, inserindo o operador de Shafranov (6.35),

$$
R \frac{\partial}{\partial R} \left(\frac{1}{R} \frac{\partial \Psi}{\partial R} \right) + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial Z^2} = -\mu_0 R^2 p'(\Psi) - \frac{1}{2} \mu_0^2 (I^2)'(\Psi). \tag{6.56}
$$

A equação (6.56) foi obtida independentemente por Lüst e Schlüter na Alemanha (1957) [37], Shafranov na União Soviética (1958) [36] e H. Grad e H. Rubin nos Estados Unidos [35]. Usando (A.53) obtemos a seguinte relação entre o operador de Shafranov e o laplaciano em coordenadas cilíndricas-II (no caso de simetria azimutal):

$$
\Delta^* \Psi = \nabla^2 \Psi - \frac{2}{R} \frac{\partial \Psi}{\partial R}, \tag{6.57}
$$

mostrando que, assim como o laplaciano, o operador de Shafranov também é linear e do tipo elíptico. A equação de Grad-Schlüter-Shafranov, portanto, é uma equação diferencial parcial do tipo elíptico, a qual pode ser linear ou não-linear dependendo do termo de fonte RJ_ϕ.

No entanto, na sua forma original (6.56) a equação de Grad-Shafranov não pode ser resolvida, uma vez que a função de fluxo poloidal Ψ é ao mesmo tempo variável dependente e independente. Logo, para podermos ter uma equação diferencial parcial que possa ser resolvida devemos especificar *a priori* os termos p' e $(I^2)'$ como funções de Ψ.

Isto se dá supondo perfis para a pressão e a função de corrente em termos de Ψ, na forma de séries de potências:

$$p(\Psi) = a_0 + a_1\Psi + a_2\Psi^2 + a_3\Psi^3 + a_4\Psi^4 + \ldots, \tag{6.58}$$

$$I^2(\Psi) = b_0 + b_1\Psi + b_2\Psi^2 + b_3\Psi^3 + b_4\Psi^4 + \ldots, \tag{6.59}$$

onde a_i e b_i $(i = 0, 1, 2, \ldots)$ são coeficientes supostamente conhecidos. Estes perfis podem ser simplesmente arbitrados ou então serem baseados em evidências experimentais.

Quando tomamos um ou mais perfis tais que tenhamos termos de terceira ordem ou superiores as respectivas derivadas terão termos quadráticos em Ψ e, consequentemente, a própria equação de Grad-Shafranov será não-linear. Portanto, no caso mais geral, não existe um teorema de existência e unicidade, de modo que não podemos saber a priori se existe uma solução, dadas as condições de contorno disponíveis, nem se a solução encontrada é única. Por este motivo, são empregadas com frequência técnicas numéricas para a solução [38].

Supondo que tenhamos obtido uma solução da equação de Grad-Schlüter-Shafranov $\Psi(R,Z)$ compatível com as condições de contorno, retornamos para os perfis (6.58)-(6.59) e determinamos a pressão p e a função de corrente poloidal I. As componentes do campo magnético serão dadas por (6.9), (6.10) e (6.44):

$$\mathbf{B} = \left(-\frac{1}{R}\frac{\partial\Psi}{\partial Z}, \frac{1}{R}\frac{\partial\Psi}{\partial R}, -\frac{\mu_0 I}{R} \right), \tag{6.60}$$

ao passo que as componentes da densidade de corrente serão dadas por (6.48), (6.49) e (6.35):

$$\mathbf{J} = \left(-\frac{1}{R}\frac{\partial I}{\partial Z}, \frac{1}{R}\frac{\partial I}{\partial R}, -Rp' - \frac{\mu_0}{2R}\left(I^2\right)' \right). \tag{6.61}$$

6.7 Condições de contorno

Tipicamente a solução da equação de Grad-Schlüter-Shafranov requer a especificação de condições de contorno. Na MHD ideal há basicamente três tipos de condições de contorno: (i) parede condutora; (ii) região de vácuo isolante; (iii) bobinas externas.

6.7.1 Parede perfeitamente condutora

A condição de contorno referente à lei de Gauss magnética é dada por (5.92), a saber

$$[\![\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{B}]\!] = 0, \tag{6.62}$$

onde $\hat{\mathbf{n}}$ é um vetor unitário normal à superfície da parede em cada ponto desta [Fig. 6.4(a)], e

$$[\![\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{B}]\!] = 0, \tag{6.63}$$

é o salto da quantidade através da superfície S da parede. Sendo o campo magnético igual a zero dentro da parede condutora, temos que

$$(\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{B})_S = 0, \tag{6.64}$$

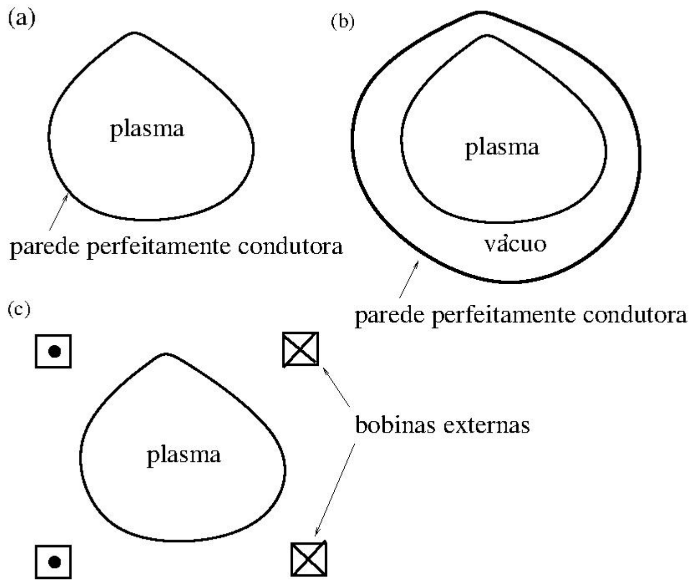

Figura 6.4: Diferentes tipos de condições de contorno.

Para a lei de Ampère usamos (5.33)

$$[\![\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{B}]\!] = 0, \tag{6.65}$$

de modo que

$$(\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{B})_S = 0, \tag{6.66}$$

A lei de Faraday, no caso de campos estáticos, é dada por (6.67)

$$\nabla \times \mathbf{E} = \mathbf{0}. \tag{6.67}$$

A condição de contorno correspondente, em analogia a (6.66), é

$$(\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{E})_S = 0, \tag{6.68}$$

já que o campo elétrico também é nulo no interior da parede condutora.

Finalmente, da lei de Ohm generalizada (5.35):

$$\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{E} + \hat{\mathbf{n}} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) = (\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{B})\mathbf{v} - (\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{v})\mathbf{B} = \mathbf{0}, \tag{6.69}$$

tal que, usando (6.66) e (6.68) obtemos uma condição de contorno para a componente normal da velocidade

$$(\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{v})_S = 0, \tag{6.70}$$

que é identicamente satisfeita para equilíbrios magnetostáticos.

6.7.2 Região isolante de vácuo

Quando o plasma está separado da parede condutora por uma região de vácuo há duas superfícies de contorno: S_w representando a parede condutora e S_b representando a fronteira do plasma [Fig. 6.4(b)]. Na região de plasma supomos válidas as equações da MHD ideal e na região de vácuo as variáveis de fluidos não são definidas. Assim o campo magnético na região de vácuo, denotado B_v, é dado pela solução do sistema de equações:

$$\nabla \times \mathbf{B}_v = 0, \qquad \nabla \cdot \mathbf{B}_v = 0, \tag{6.71}$$

tal que, na parede condutora, tenhamos a seguinte condição de contorno:

$$(\hat{\mathbf{n}}_v \times \mathbf{B}_v)_{S_w} = 0, \tag{6.72}$$

onde $\hat{\mathbf{n}}_v$ é um vetor unitário normal à superfície S_w.

Supomos que a fronteira do plasma S_b coincida com uma superfície magnética. Nela podemos aplicar a condição (6.63):

$$(\hat{\mathbf{n}}_v \cdot \mathbf{B}_v)_{S_b} = (\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{B})_{S_b} \tag{6.73}$$

Uma diferença entre este caso e o precedente é a possibilidade de termos correntes elétricas restritas à superfície da fronteira do plasma. Neste caso a lei de Ampère fornece a seguinte condição de contorno

$$[\![\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{B}]\!]_{S_b} = \mathbf{K}(S_b), \tag{6.74}$$

onde $\mathbf{K}$ é a densidade de corrente superficial.

A equação de balanço de momentum linear também nos fornece uma condição de contorno, dada por (5.39) no presente contexto como

$$\left(p + \frac{B^2}{2\mu_0}\right)_{S_b} = \left(\frac{B_v^2}{2\mu_0}\right)_{S_b}, \tag{6.75}$$

já que a pressão é nula na região do vácuo.

6.7.3 Plasma envolvido por bobinas externas de corrente

Vimos no início deste capítulo (teorema do virial) que um confinamento de plasma não pode ser obtido unicamente pela ação de correntes elétricas internas ao plasma: deve haver correntes externas. Nos dois casos precedentes, como há uma parede condutora que envolve o plasma, podemos imaginar a existência de correntes-imagem externas ao plasma. Já no presente caso o plasma é efetivamente envolvido por uma região de vácuo e por bobinas externas de corrente [Fig. 6.4(c)].

Em analogia ao caso anterior, vamos representar as bobinas externas de corrente por uma densidade de corrente $\mathbf{K}_c$ restrita a uma superfície S_c na região de vácuo que envolve o plasma. Assim as condições de contorno serão dadas por (6.73) e (6.74)

$$[\![\hat{\mathbf{n}}_v \cdot \mathbf{B}_v]\!]_{S_c} = 0, \tag{6.76}$$

$$[\![\hat{\mathbf{n}}_v \times \mathbf{B}_v]\!]_{S_c} = \mathbf{K}(S_c), \tag{6.77}$$

sendo que, agora, as regiões interna e externa à superfície S_c não estão mais isoladas, o que introduz dificuldades na implementação das condições de contorno acima.

6.8 Solução de Solovev

Uma solução exata para a equação de Grad-Schlüter-Shafranov (6.56) foi obtida por L. Solovev em 1967, que supôs perfis lineares tanto para a pressão como a função de corrente [39]

$$p(\Psi) = p_0 - \frac{a}{\mu_0}\Psi, \tag{6.78}$$

$$I^2(\Psi) = I_0^2 - \frac{4bR_0^2}{\mu_0^2}\Psi, \tag{6.79}$$

onde R_0 é um comprimento característico, p_0, I_0^2, a e b são constantes. Para estes perfis a equação (6.56) torna-se

$$\frac{\partial^2\Psi}{\partial R^2} - \frac{1}{R}\frac{\partial\Psi}{\partial R} + \frac{\partial^2\Psi}{\partial Z^2} = aR^2 - 2bR_0^2. \tag{6.80}$$

A solução de Solovev é dada por

$$\Psi(P,Z) = \frac{1}{2}(2bR_0^2 + CR^2)Z^2 + \frac{1}{8}(a-C)\left(R^2 - R_0^2\right)^2, \tag{6.81}$$

o que pode ser verificado por substituição direta em (6.99). C é uma constante de integração.

O eixo magnético, situado em (R_a, Z_a), deve ser um ponto de extremo para a função de fluxo, ou seja, suas coordenadas são obtidas impondo as seguintes condições

$$\left(\frac{\partial\Psi}{\partial R}\right)_{(R_a,Z_a)} = \left(\frac{\partial\Psi}{\partial Z}\right)_{(R_a,Z_a)} = 0, \tag{6.82}$$

que, em vista de (6.81), fornecem $R_a = R_0$ e $Z = 0$. Neste ponto $\Psi(R_0, 0) = 0$.

Nas vizinhanças do eixo magnético nós podemos expandir a solução (6.81) em série de potências de $(R - R_0)$ e Z. Como os termos lineares anulam-se devido a 6.82, nós devemos reter os termos quadráticos, o que resulta em

$$\Psi(R,Z) \approx \frac{2}{R_0^2}\left[(a-C)(R-R_0)^2 + (2b+C)Z^2\right]. \tag{6.83}$$

As interseções entre as superfícies magnéticas toroidais com o plano $\phi = 0$ são curvas para as quais a função de fluxo poloidal assume valores constantes $\Psi = k$. Nas proximidades do eixo magnético a expressão (6.83) descreve uma família de elipses dada por

$$\frac{(R-R_0{}^2}{\ell_R^2} + \frac{Z^2}{\ell_Z^2} = 1,$$

com o centro no eixo magnético e com semieixos maior e menor dados por

$$\ell_R = \sqrt{\frac{2k}{R_0^2(a-C)}}, \qquad \ell_Z = \sqrt{\frac{2k}{R_0^2(2b+C)}}.$$

A excentricidade destas elipses é dada por

$$\varepsilon = \frac{\ell_Z}{\ell_R} = \sqrt{\frac{a-C}{2b+C}}. \tag{6.84}$$

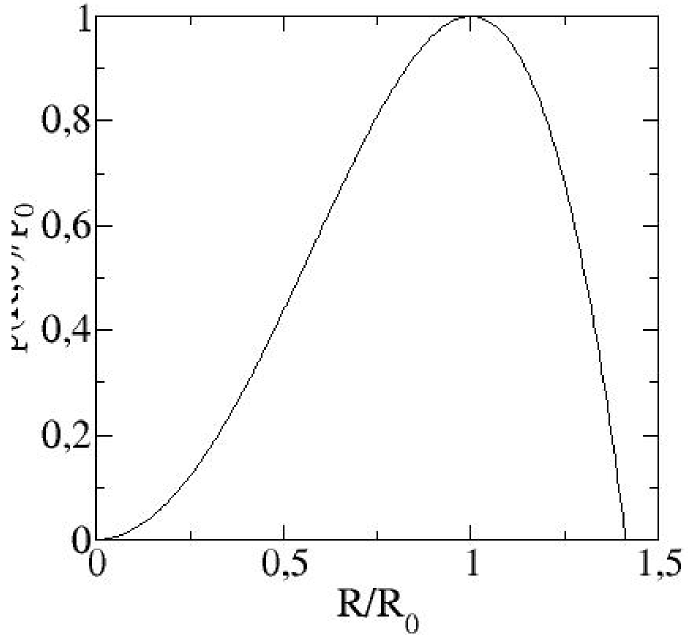

Figura 6.5: Perfil radial da pressão normalizada no plano equatorial.

Á medida em que nos afastamos do eixo magnético, as curvas $\Psi(R,Z)=k$ deixam de ser elipses e passam a ser assimetricamente concentradas à direita do eixo magnético. De fato, para um dado valor $k=\Psi_b$ temos uma separatriz que representa uma superfície magnética degenerada, pois conecta-se ao eixo z. Impondo a condição

$$\Psi(0,0)=\Psi(R_b,0)=\Psi_b$$

obtemos $R_b=R_0\sqrt{2}$. Para $0<\Psi<\Psi_b$, as curvas $\Psi=const.$ são fechadas, correspondendo a superfícies magnéticas com topologia de toróides coaxiais, ao passo que $\Psi>\Psi_b$ leva-nos a curvas abertas. Do ponto de vista do confinamento do plasma apenas as superfícies fechadas têm interesse, de modo que podemos considerar a separatriz como a fronteira do plasma.

O perfil radial da pressão é obtido substituindo-se (6.81) em (6.78). No plano equatorial $Z=0$ teremos

$$p(R,0)=p_0-\frac{a(a-C)}{8\mu_0}\left(R^2-R_0^2\right)^2. \tag{6.85}$$

Se R_b indica a fronteira do plasma, impomos $p(R_b,0)=0$, que implica em

$$p_0=\frac{a(a-C)R_0^4}{8\mu_0}. \tag{6.86}$$

Como a pressão é sempre não-negativa, temos que $a(a-C)>0$, o que representa uma restrição nos valores possíveis para a constante C. Assim

$$\frac{p(R,0)}{p_0}=1-\left(\frac{R^2}{R_0^2}-1\right)^2, \tag{6.87}$$

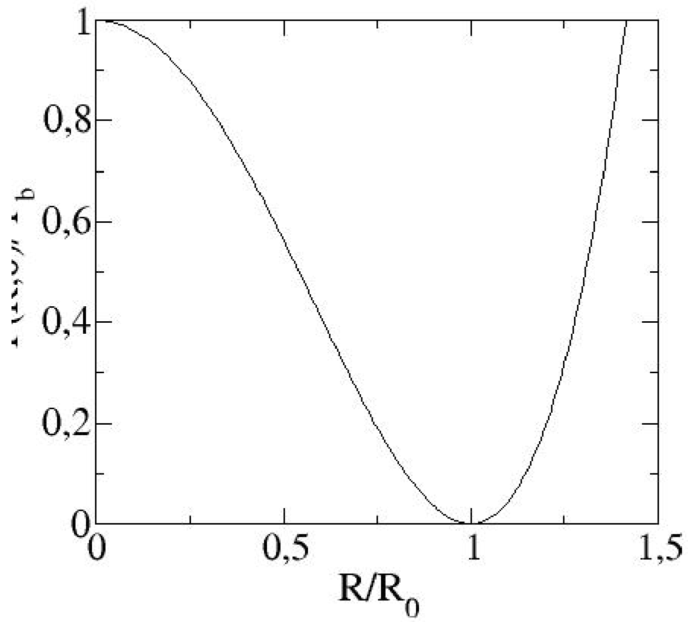

Figura 6.6: Perfil radial da função de fluxo poloidal normalizada sobre o plano equatorial.

cujo gráfico é mostrado na Fig. 6.5. Note que a pressão tem seu valor máximo (p_0) no eixo magnético.

A partir de (6.86), o perfil radial da função de fluxo no plano equatorial $Z = 0$ fica

$$\Psi(R,0) = \Psi_b \left[\left(\frac{R}{R_0} \right)^2 - 1 \right]^2, \tag{6.88}$$

e que é mostrado na Fig. 6.6. As curvas de nível $\Psi = const.$ são exibidas na Fig. 6.7, representando as interseções das superfícies magnéticas toroidais com o plano $\phi = 0$, e confirmando a existência de superfícies abertas e fechadas, dependendo do valor da constante. A configuração representada é característica dos chamados toróides compactos.

As componentes físicas do campo magnético para a solução de Solovev serão dadas por (6.60). Usando (6.79) e (6.81) elas são

$$B_R = -\frac{1}{R}(2bR_0^2 + CR^2)Z, \tag{6.89}$$

$$B_Z = CZ^2 + \frac{1}{2}(a - C)(R^2 - R_0^2), \tag{6.90}$$

$$B_\phi = -\frac{\mu_0}{R}\left\{ I_0^2 - \frac{4bR_0^2}{\mu_0^2}\Psi(R,Z) \right\}^{1/2}. \tag{6.91}$$

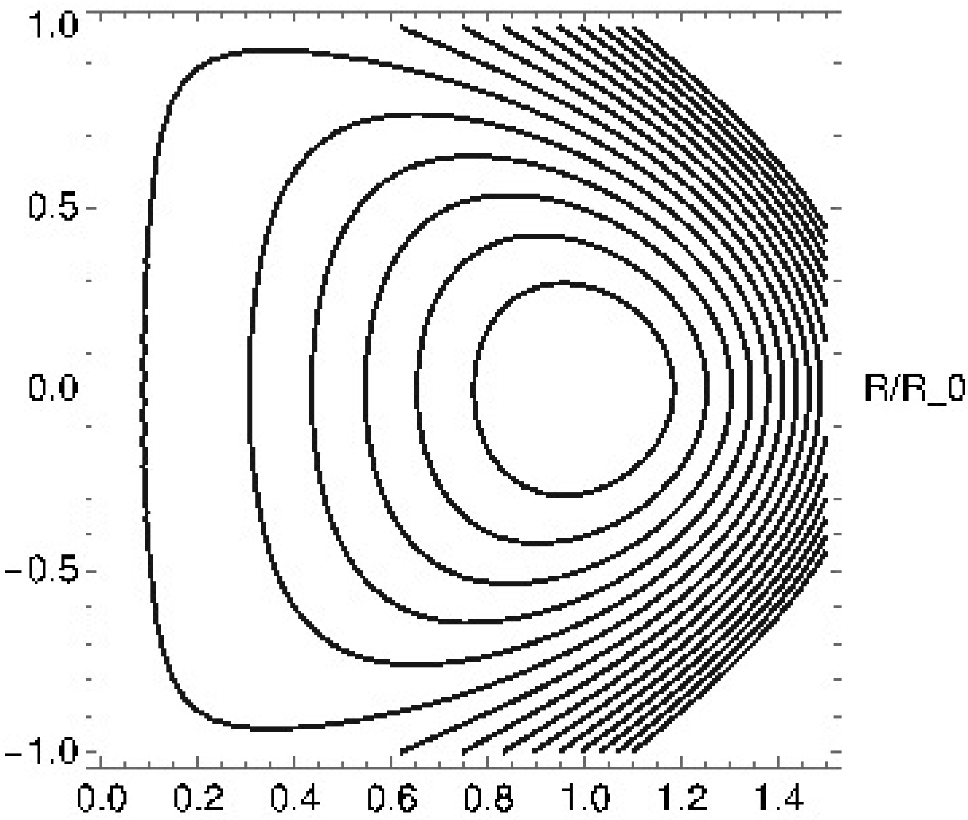

Figura 6.7: Curvas de nível para a solução de Solovev.

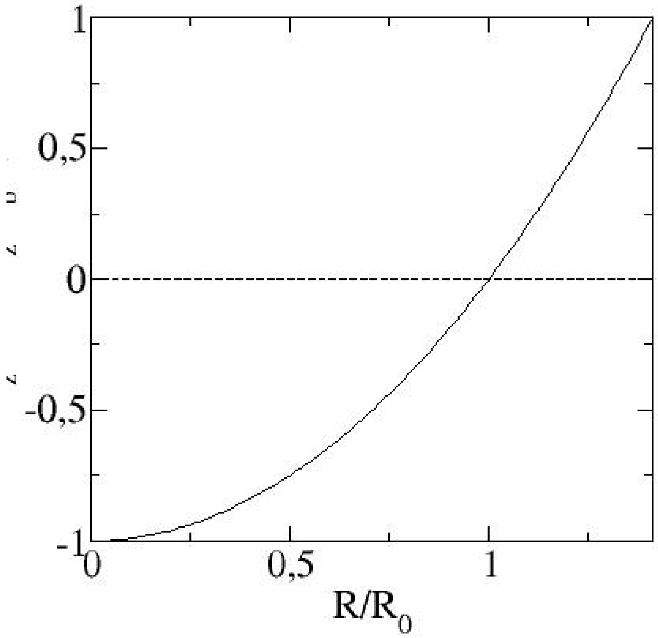

Figura 6.8: Perfil radial da componente B_Z no plano equatorial.

Considerando estes perfis no plano equatorial teremos

$$B_R(R,0) = 0, \tag{6.92}$$

$$B_Z(R,0) = B_Z(R_b,0)\left[\left(\frac{R}{R_0}\right)^2 - 1\right], \tag{6.93}$$

$$B_\phi(R,0) = -\left\{\frac{\mu_0^2 I_0^2}{R^2} - b(a-C)\frac{R_0^2}{R^2}(R^2 - R_0^2)^2\right\}^{1/2}. \tag{6.94}$$

O perfil correspondente ao campo B_Z normalizado é mostrado na Fig. 6.8. Observamos uma reversão de sentido do mesmo quando passamos de um lado a outro do eixo magnético.

As componentes da densidade de corrente serão dadas por (6.61). A corrente toroidal, em particular, é

$$J_\phi(R) = -\frac{aR}{\mu_0} + \frac{2bR_0^2}{R\mu_0}, \tag{6.95}$$

a qual diverge na origem.

6.9 Solução de Maschke

Outra solução analítica da equação de Grad-Schlüter-Shafranov em coordenadas cilíndricas-II,

$$R\frac{\partial}{\partial R}\left(\frac{1}{R}\frac{\partial \Psi}{\partial R}\right) + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial Z^2} = -\mu_0 R^2 p'(\Psi) - \frac{1}{2}\mu_0 (I^2)'(\Psi). \tag{6.96}$$

foi proposta por Maschke, que supôs perfis quadráticos para a pressão e a função de corrente [41, 42]

$$p(\Psi) = p_0 + \frac{P}{2\mu_0 R_0^4}\Psi^2, \tag{6.97}$$

$$I^2(\Psi) = I_0^2 + \frac{M}{\mu_0^2 R_0^2}\Psi^2, \tag{6.98}$$

onde p_0, I_0^2, P e M são constantes, e R_0 é um comprimento característico, de forma que a equação (6.96) fica

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial R^2} - \frac{1}{R}\frac{\partial \Psi}{\partial R} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial Z^2} = -\left(\frac{R^2 P}{R_0^4} + \frac{M}{R_0^2}\right)\Psi. \tag{6.99}$$

É conveniente definir variáveis adimensionais como

$$x = \frac{R}{R_0}, \qquad z = \frac{Z}{R_0}, \tag{6.100}$$

com as quais a equação torna-se

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} - \frac{1}{x}\frac{\partial \Psi}{\partial x} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} = -(Px^2 + M)\Psi. \tag{6.101}$$

Aplicando a seguinte separação de variáveis

$$\Psi(x,z) = G(x)F(z), \tag{6.102}$$

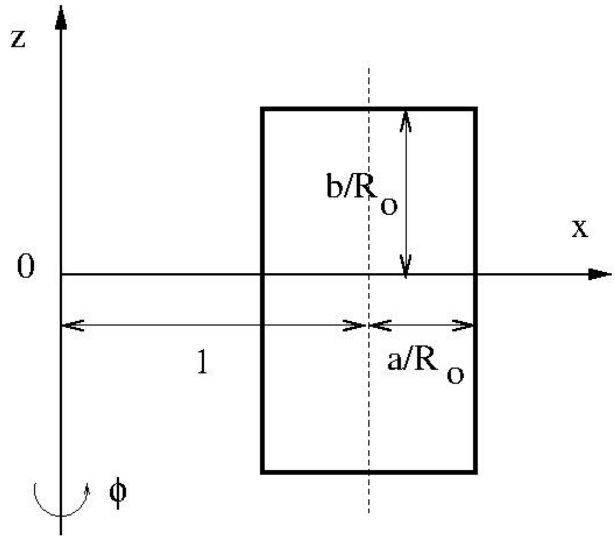

Figura 6.9: Geometria usada na solução de Maschke.

obtemos as equações diferenciais ordinárias

$$\frac{d^2G}{dx^2} - \frac{1}{x}\frac{dG}{dx} + (Px^2 + M - k^2)G = 0, \tag{6.103}$$

$$\frac{d^2F}{dz^2} + k^2F = 0, \tag{6.104}$$

onde k^2 é uma constante de separação.

A solução de (6.104) é imediata,

$$F(z) = a_1 \cos(kz) + b_1 \sin(kz). \tag{6.105}$$

Desejamos que a soluções sejam simétricas em relação ao plano $z = 0$. Nesse caso $F(z)$ deve ser uma função par em z, de modo que $b_1 = 0$ e $a_1 = 1$, sem perda de generalidade.

Definindo a nova variável independente

$$\rho = \frac{1}{2}\sqrt{P}x^2, \tag{6.106}$$

temos que a equação (6.103) torna-se

$$\frac{d^2G}{d\rho^2} + \left(1 - \frac{2\eta}{\rho}\right)G = 0, \tag{6.107}$$

onde definimos

$$\eta = \frac{k^2 - M}{4\sqrt{P}}. \tag{6.108}$$

A equação (6.107) tem como solução geral uma combinação linear das funções de onda de Coulomb de ordem zero [?]

$$G(\rho) = \alpha[\mathcal{F}_0(\eta,\rho) + \gamma\mathcal{G}_0(\eta,\rho)], \tag{6.109}$$

onde α e γ são constantes de integração, de modo que a solução de Maschke será

$$\Psi(x,z) = \alpha[\mathcal{F}_0(\eta,\rho) + \gamma\mathcal{G}_0(\eta,\rho)]\cos(kz). \tag{6.110}$$

Vamos considerar a seguinte condição de contorno: o plasma é confinado num toróide de seção reta retangular de lados $2a$ e $2b$, e cujo centro é o eixo geométrico situado à distância R_0 do eixo maior [Fig. 6.9]. Como a pressão deve anular-se na superfície do toróide, por (6.97), temos que

$$\Psi\left(x_b = 1 \pm \frac{a}{R_0}, z_b = \pm\frac{b}{R_0}\right) = 0. \tag{6.111}$$

Impondo esta condição em (6.110) obtemos que os valores permitidos para a constante de separação são dados por

$$k_n = \frac{R_0}{b}(2n+1)\frac{\pi}{2}, \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots). \tag{6.112}$$

enquanto as funções de onda coulombianas satisfazem a equação transcendente

$$\frac{\mathcal{F}_0(\eta_m, \rho^+)}{\mathcal{G}_0(\eta_m, \rho^+)} = \frac{\mathcal{F}_0(\eta_m, \rho^-)}{\mathcal{G}_0(\eta_m, \rho^-)}, \tag{6.113}$$

onde definimos

$$\rho^{\pm} = \frac{1}{2}\sqrt{P}\left(1 \pm \frac{a}{R_0}\right)^2, \tag{6.114}$$

e η_m, dado por (6.108), com $m = 0, 1, 2, \ldots$ representam as infinitas soluções possíveis para (6.113), ordenadas tal que $\eta_0 > \eta_1 > \eta_2 > \ldots$. Dados os possíveis valores para k em (6.112) podemos reescrever a condição (6.108) em termos dos autovalores de M, dados por

$$M_{mn} = k_n^2 - 4\sqrt{P}\eta_m. \tag{6.115}$$

Substituindo a constante de integração γ pelo seu valor preconizado por (6.113), as autofunções compatíveis com a condição de contorno imposta podem ser escritas como

$$\Psi_{mn}(x,z) = \alpha_{mn}\left[\mathcal{F}_0(\eta_m, \rho) - \frac{\mathcal{F}_0(\eta_m, \rho^-)}{\mathcal{G}_0(\eta_m, \rho^-)}\mathcal{G}_0(\eta_m, \rho)\right]\cos(k_n z). \tag{6.116}$$

Supondo a existência de um único eixo magnético no interior da câmara toroidal, é suficiente analisar o modo fundamental $m = n = 0$, para o qual

$$\Psi_{00}(x,z) = \alpha_{00}\left[\mathcal{F}_0(\eta_0, \rho) - \frac{\mathcal{F}_0(\eta_0, \rho^-)}{\mathcal{G}_0(\eta_0, \rho^-)}\mathcal{G}_0(\eta_0, \rho)\right]\cos(k_0 z), \tag{6.117}$$

onde

$$k_0 = \frac{R_0}{b}\frac{\pi}{2}. \tag{6.118}$$

Vamos considerar, à guisa de exemplo numérica, o caso particular $a = b$ (seção reta quadrada) e $a/R_0 = 0,2$. Neste caso teremos $k_0 = 7,85$ e

$$\rho^+ = 0,72\sqrt{P}, \qquad \rho^- = 0,32\sqrt{P}$$

são determinados em termos do parâmetro de pressão P. Na Fig. 6.10 nós mostramos a variação do maior autovalor η_0 em função do parâmetro ρ^+, obtida pela solução numérica da equação transcendente (6.113). Dentro da faixa abrangida pelos dados obtidos por Maschke [41] é possível ajustar uma reta de equação

$$\eta_0 = -2,325 + 0,465\rho^+.$$

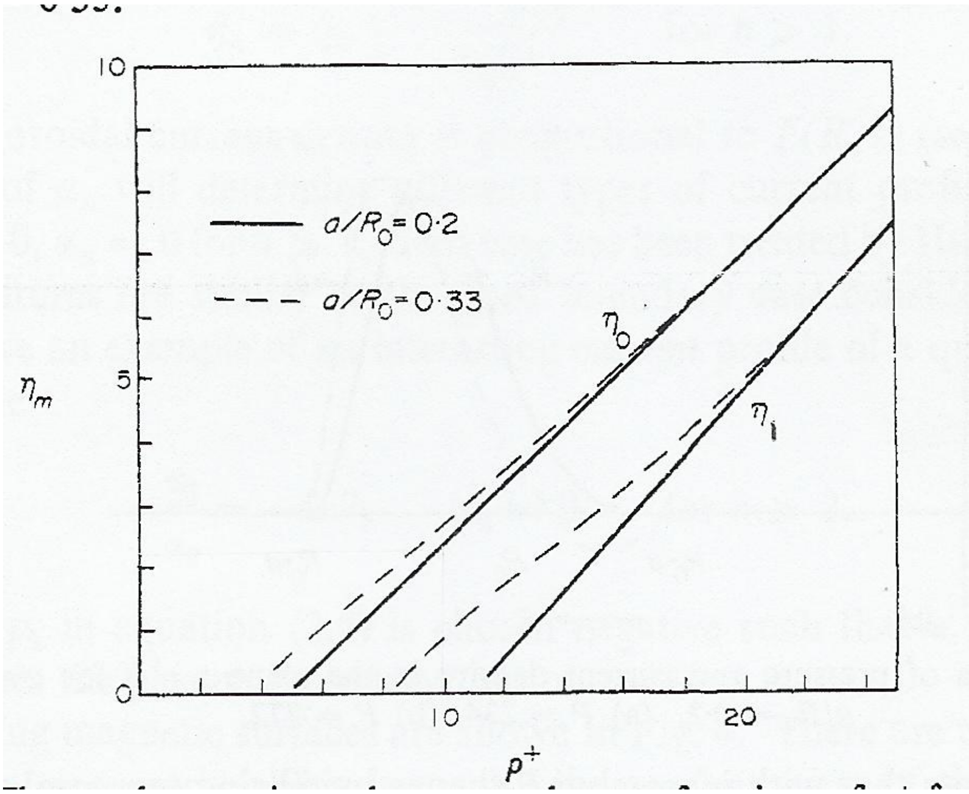

Figura 6.10: O maior autovalor η_0 em função do parâmetro ρ^+ para dois valores de a/R_0, com $a = b$. Fonte: [41].

Supondo, por exemplo, que $P = 234$, teremos $\rho^+ = 11,014$ e $\rho^- = 4,895$, de modo que $\eta_0 \approx 2,8$ e, portanto, que o valor do parâmetro de corrente M, dado por (6.115), seja igual a $-109,7$.

A solução normalizada no plano equatorial correspondente a estes valores de P e M é

$$\psi_{00}(x, z = 0) = \frac{\Psi_{00}}{\alpha_{00}} = \mathcal{F}_0(\eta_0, \rho) - \frac{\mathcal{F}_0(\eta_0, \rho^-)}{\mathcal{G}_0(\eta_0, \rho^-)} \mathcal{G}_0(\eta_0, \rho). \tag{6.119}$$

Note que, neste caso, $\rho = 7,65x^2$ e que $0,8 \leq x \leq 1,2$. Observamos que a posição do eixo magnético R_a, correspondente a um extremo da função de fluxo, não coincide com a posição do eixo geométrico R_0, havendo um deslocamento para fora, o que ocorre devido às condições de contorno aqui adotadas.

A pressão correspondente a esta solução tem o seguinte perfil no plano equatorial $z = 0$

$$p(x, 0) = \frac{P\alpha_{00}}{\mu_0 R_0^4} \left[\mathcal{F}_0(\eta_0, \rho) - \frac{\mathcal{F}_0(\eta_m, \rho^-)}{\mathcal{G}_0(\eta_m, \rho^-)} \mathcal{G}_0(\eta_m, \rho) \right], \tag{6.120}$$

ilustrada na Fig. 6.11(a).

Para obtermos a densidade de corrente toroidal usamos (6.61)

$$J_\phi = -Rp'(\Psi) + \frac{\mu_0}{2R} (I^2)'(\Psi). \tag{6.121}$$

Substituindo os perfis (6.97) e (6.98) obtemos

$$J_\phi(R, Z) = -\frac{1}{\mu_0 R_0^3} \left(\frac{PR}{R_0} - \frac{MR_0}{R} \right) \Psi(R, Z) \tag{6.122}$$

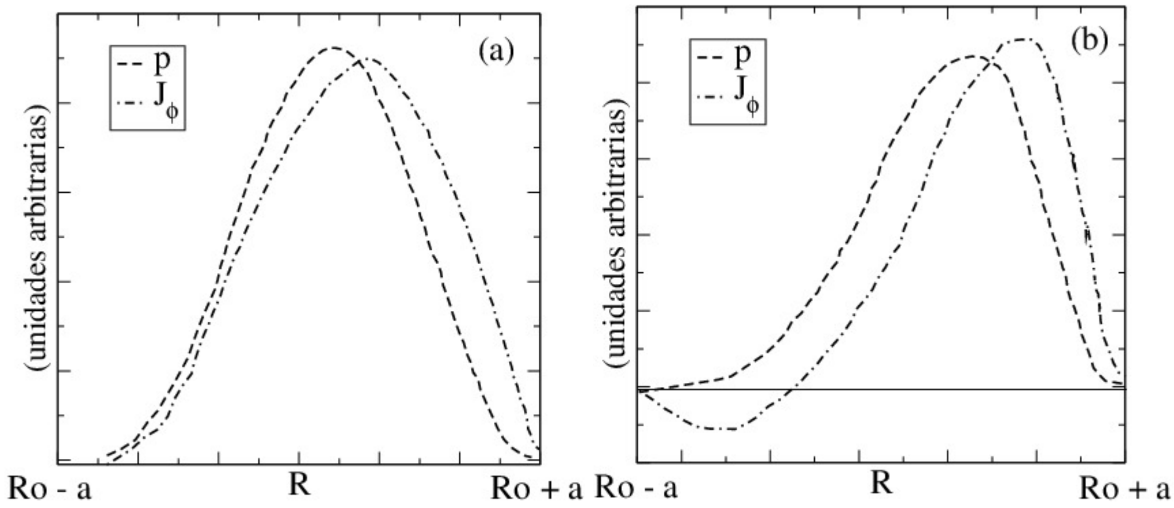

Figura 6.11: Perfis radiais da pressão e da densidade de corrente toroidal no plano equatorial para $a = b = 0,2R_0$ e (a) $P = 234$, (b) $P = 772$. Fonte: [41]

cujo perfil no plano equatorial também está ilustrado na Fig. 6.11(a).

Considerando, agora, um valor maior do parâmetro de pressão, digamos $P = 772$, recalculamos todas as outras constantes, a saber

$$\rho^+ = 20,0, \qquad \rho^- = 8,89, \qquad \eta_0 \approx 7,0, \qquad M_{00} = -714.$$

Os perfis da pressão e da densidade de corrente toroidal, para este novo valor de P, são mostrados na Fig. 6.11(b). É interessante observar que, enquanto para $P = 234$ a densidade de corrente é sempre positiva, quando $P = 772$, a corrente é inicialmente negativa e depois passa a ser positiva. A condição para que ocorra essa reversão de corrente é que a J_ϕ, dado por (6.122), assuma valores negativos no entorno do ponto $R = R_0 - a$, levando-nos à seguinte desigualdade

$$\left(1 - \frac{a}{R_0}\right)^2 P < k_0^2 - 4\sqrt{P}\eta_0. \tag{6.123}$$

6.10 O método da função de Green

6.10.1 Solução da equação inomogênea

Vamos escrever a equação (inomogênea) de Grad-Schlüter-Shafranov (6.56) na forma:

$$\Delta^*\Psi(\mathbf{r}) = R^2\,\nabla\cdot\left(\frac{1}{R^2}\nabla^2\Psi\right) = -\mu_0 R J_\phi(R,Z), \tag{6.124}$$

com condições de contorno (de Dirichlet ou Neumann) especificadas sobre uma dada superfície S. A função de Green correspondente, denotada $G(R,Z;R',Z')$, satisfaz a seguinte equação

$$\Delta^* G(\mathbf{r},\mathbf{r}') = -\mu_0 R\,\delta(R-R')\delta(Z-Z'), \tag{6.125}$$

e as mesmas condições de contorno da solução Ψ.

Tradicionalmente a função de Green é empregada para exprimir a solução geral da equação inomogênea em termos de quadraturas (integrais), o que é um procedimento numericamente mais simples que a solução por métodos como diferenças finitas ou pseudo-espectrais (e que não serão objeto de nosso estudo. Maiores detalhes podem ser encontrados na literatura especializada, por exemplo em [38]).

Partimos da seguinte relação vetorial, válida para funções escalares arbitrárias $u(\mathbf{r}')$, $v(\mathbf{r}')$, e $w(\mathbf{r}')$:

$$\nabla' \cdot (uv\nabla' w) = (\nabla' u) \cdot (v\nabla' w) + u\nabla' \cdot (v\nabla' w).$$

onde as derivadas do operador ∇' são tomadas em relação às variáveis com linha: $\mathbf{r}' = (R', Z', \phi')$. Integrando a relação acima numa região finita de volume V, limitada por uma superfície fechada S temos (a integração será também realizada nas variáveis com linha)

$$\begin{aligned}\int_V d^3r'\, \nabla' \cdot (uv\nabla' w) &= \oint_S da'\, uv\,\hat{\mathbf{n}}' \cdot \nabla' w = \oint_S da'\, uv\,\frac{\partial w}{\partial n'} \\ &= \int_V d^3r'\, (\nabla' u) \cdot (v\nabla' w) + \int_V d^3r'\, u\nabla' \cdot (v\nabla' w),\end{aligned} \tag{6.126}$$

onde $\partial/\partial n'$ denota a derivada normal do argumento, ou seja, a derivada ao longo da direção definida pelo vetor unitário $\mathbf{n}'$, que é perpendicular a cada ponto da superfície S. Esta é a primeira identidade de Green no espaço.

Trocando u por w e *vice-versa* temos uma expressão similar a (6.126), que pode ser subtraida desta membro-a-membro, fornecendo a segunda identidade de Green no espaço:

$$\oint_S da'\, v\left(u\frac{\partial w}{\partial n'} - w\frac{\partial u}{\partial n'}\right) = \int_V d^3r'\, [u\nabla' \cdot (v\nabla' w) - w\nabla' \cdot (v\nabla' u)]. \tag{6.127}$$

Fazendo $v = 1/R'^2$ nesta expressão e usando que

$$\nabla' \cdot \left(\frac{1}{R'^2}\nabla'^2 u\right) = \frac{1}{R'^2}\Delta'^* u,$$

com uma expressão análoga para v, teremos

$$\oint_S \frac{da'}{R'^2}\left(u\frac{\partial w}{\partial n'} - w\frac{\partial u}{\partial n'}\right) = \int_V \frac{d^3r'}{R'^2}\left(u\Delta'^* w - w\Delta'^* u\right). \tag{6.128}$$

A equação de Grad-Shafranov descreve um sistema simétrico em relação ao ângulo azimutal ϕ, de modo que a sua solução corresponde, de fato, a um equilíbrio bidimensional. Neste caso precisamos de uma identidade análoga a (6.128), mas no plano $\phi = 0$ ao invés do espaço, o que implica nas seguintes mudanças:

$$\frac{da}{R^2} \to \frac{d\ell}{R}, \qquad \frac{d^3r}{R^2} \to \frac{da}{R},$$

onde S é uma superfície limitada pela curva fechada C, da qual $d\ell$ é um elemento de comprimento. Após estas trocas, e fazendo $u(\mathbf{r}') = \Psi(\mathbf{r}')$ e $v = G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ na segunda identidade de Green (no plano) teremos:

$$\oint_C \frac{d\ell'}{R'}\left(\Psi(\mathbf{r}')\frac{\partial G}{\partial n'} - G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')\frac{\partial \Psi}{\partial n'}\right) = \int_S \frac{da'}{R'}\left(\Psi(\mathbf{r}')\Delta'^* G - G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')\Delta'^* \Psi\right). \tag{6.129}$$

Usando (6.124) e (6.134) no espaço das variáveis com linha e efetuando as integrações sobre as funções delta obtemos a solução da equação inomogênea de Grad-Shafranov:

$$\Psi(R,Z) = \int_S da'\, G(R,Z;R',Z') J_\phi(R',Z') - \oint_C \frac{d\ell'}{\mu_0 R'} \left(\Psi \frac{\partial G}{\partial n'} - G \frac{\partial \Psi}{\partial n'} \right), \tag{6.130}$$

onde $da' = dR'dZ'$ e os termos da integral devem ser calculados sobre a curva fechada C.

A equação (6.130) permite a determinação da função de fluxo Ψ no interior do domínio S do plano $\phi = 0$ se os valores de Ψ e G e das respectivas derivadas normais sobre C forem especificados. Vamos considerar, portanto, algumas possibilidades [44]:
(a) Se S abrange todo o plano poloidal $\phi = 0$, e impondo a seguinte condição sobre a função de Green

$$\lim_{|\mathbf{r}| \to \infty} G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = 0,$$

a solução geral da equação inomogênea (6.130) será simplesmente

$$\Psi(\mathbf{r}) = \int da'\, G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') J_\phi(\mathbf{r}'), \tag{6.131}$$

onde G_0 é chamada função de Green do espaço livre.
(b) Se a função de Green satisfaz uma condição de Dirichlet homogênea sobre a curva fechada C

$$G_D(\mathbf{r}, \mathbf{r}' \in C) = 0,$$

a solução (6.130) torna-se

$$\Psi(\mathbf{r}) = \int_S da'\, G_D(\mathbf{r}, \mathbf{r}') J_\phi(\mathbf{r}') - \oint_C d\ell' \frac{\Psi}{\mu_0 R'} \frac{\partial G_D}{\partial n'}, \tag{6.132}$$

que pode ser determinada atribuindo condições de contorno de Dirichlet para Ψ sobre a curva C.
(c) Se a função de Green satisfaz uma condição de Neumann homogênea sobre C

$$\left(\frac{\partial G_N}{\partial n'} \right)_{(\mathbf{r}, \mathbf{r}' \in C)} = 0,$$

a solução (6.130) fica

$$\Psi(\mathbf{r}) = \int_S da'\, G_N(\mathbf{r}, \mathbf{r}') J_\phi(\mathbf{r}') + \oint_C d\ell' \frac{G_N}{\mu_0 R'} \frac{\partial \Psi}{\partial n'}, \tag{6.133}$$

de modo que será suficiente impor condições de contorno de Neumann para Ψ sobre C.

6.10.2 Determinação da função de Green no espaço livre

A função de Green no espaço livre é a solução de (6.134), que reescrevemos na forma

$$\Delta^* G_0(R,Z;R',Z') = -\mu_0 R\, \delta(R - R') \delta(Z - Z'). \tag{6.134}$$

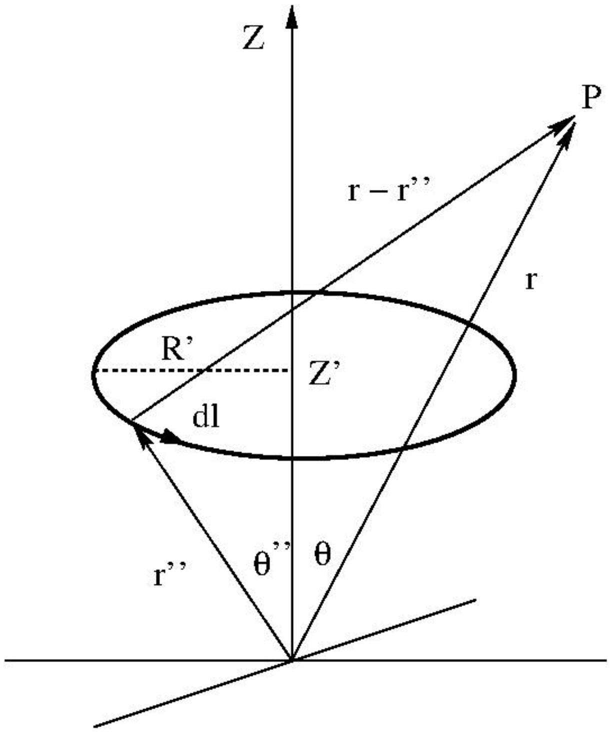

Figura 6.12: Potencial vetor gerado por um anel de corrente.

cujo segundo membro, *vis-a-vis* de (6.124), pode ser interpretado como proveniente de uma densidade de corrente singular na forma

$$J_\phi(\mathbf{r}) = I_\phi\,\delta(R-R')\delta(Z-Z'), \tag{6.135}$$

que correspondente a uma espira infinitesimalmente fina de raio R' e cujo centro está situado na posição Z', conduzindo uma corrente $I_\phi = 1$. Assim, a função de Green é a função de fluxo produzida por esta espira.

Por outro lado, de (6.14) temos que

$$\Psi(R,Z) = RA_\phi(R,Z), \tag{6.136}$$

indicando que a função de Green $G(R,Z;R',Z')/R$ é a componente toroidal do potencial vetor correspondente a esta espira, que pode ser obtida diretamente a partir da Lei de Biot-Savart como [20]:

$$\mathbf{A}(R,Z) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int d^3r''\,\frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}'')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}''|}, \tag{6.137}$$

A densidade de corrente será, neste caso, dada por

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}'') = \delta(R''-R')\delta(Z''-Z')(-\sin\phi''\hat{\mathbf{e}}_x + \cos\phi''\hat{\mathbf{e}}_y). \tag{6.138}$$

Como o sistema tem simetria azimutal podemos escolher o ponto de observação no plano $\phi = 0$ [Fig. 6.12], de modo que

$$\begin{aligned}
|\mathbf{r}-\mathbf{r}''|^2 &= r^2 + r''^2 - 2rr''\cos\gamma \\
&= r^2 + r''^2 - 2rr''(\cos\theta\cos\theta'' + \sin\theta\sin\theta''\cos\phi'') \\
&= R^2 + Z^2 + R''^2 + Z''^2 - 2(ZZ'' + RR''\cos\phi'')
\end{aligned} \tag{6.139}$$

Substituindo (6.138) e (6.139) em (6.137) obtemos

$$
\begin{aligned}
\mathbf{A}(R,Z) &= \frac{\mu_0}{4\pi}\int_0^{2\pi} d\phi'' \left(-\sin\phi''\hat{\mathbf{e}}_x + \cos\phi''\hat{\mathbf{e}}_y\right)\times \\
&\int_{-\infty}^{\infty} dZ''\delta(Z''-Z')\int_0^{\infty} \frac{dR''\,R''\delta(R''-R')}{\sqrt{R^2+Z^2+R''^2+Z''^2-2(ZZ''+RR''\cos\phi'')}} \\
&= \frac{\mu_0 R'}{4\pi}\int_0^{2\pi} d\phi''\left(-\sin\phi''\hat{\mathbf{e}}_x+\cos\phi''\hat{\mathbf{e}}_y\right)\times \\
&\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dZ''\,\delta(Z''-Z')}{\sqrt{R^2+Z^2+R'^2+Z''^2-2(ZZ''+RR'\cos\phi'')}} \\
&= \frac{\mu_0 R'}{4\pi}\left\{-\hat{\mathbf{e}}_x \underbrace{\int_0^{2\pi}\frac{d\phi''\,\sin\phi''}{\sqrt{R^2+Z^2+R'^2+Z'^2-2(ZZ'+RR'\cos\phi'')}}}_{=0}+\right. \\
&\left.\hat{\mathbf{e}}_y\int_0^{2\pi}\frac{d\phi''\,\cos\phi''}{\sqrt{R^2+Z^2+R'^2+Z'^2-2(ZZ'+RR'\cos\phi'')}}+\right\} \\
&= \frac{\mu_0 R'}{4\pi}\frac{1}{\sqrt{RR'}}\hat{\mathbf{e}}_y\int_0^{2\pi}\frac{d\phi''\,\cos\phi''}{\sqrt{(4/k^2)-2(1-\cos\phi'')}}
\end{aligned}
\tag{6.140}
$$

onde definimos

$$
k^2 = \frac{4RR'}{(R+R')^2+(Z-Z')^2}. \tag{6.141}
$$

Fazendo a transformação de variável $\xi = \pi - \phi''$ teremos

$$
\mathbf{A}(R,Z) = -\frac{\mu_0 R'}{4\pi}\frac{\hat{\mathbf{e}}_y}{\sqrt{RR'}}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{d\xi\,\cos\xi}{\sqrt{(4/k^2)-2(1-\cos\xi)}}. \tag{6.142}
$$

Usando identidades trigonométricas, após várias manipulações, é

$$
\mathbf{A}(R,Z) = -\frac{\mu_0 R'}{4\pi}\frac{\hat{\mathbf{e}}_y}{\sqrt{RR'}}\frac{1}{2k}\int_{-\pi}^{\pi}d\xi\left[\frac{k^2-2}{\sqrt{1-k^2\sin^2(\xi/2)}}+2\sqrt{1-k^2\sin^2\left(\frac{\xi}{2}\right)}\right]. \tag{6.143}
$$

Outra mudança de variável é $\zeta = \xi/2$, com a qual chegamos, finalmente, à expressão

$$
\mathbf{A}(R,Z) = \frac{\mu_0 R'}{\pi k}\frac{\hat{\mathbf{e}}_y}{\sqrt{RR'}}\left[\left(1-\frac{k^2}{2}\right)\mathsf{K}(k)-\mathsf{E}(k)\right], \tag{6.144}
$$

onde empregamos as integrais elípticas completas de primeira e segunda espécies:

$$
\mathsf{K}(k) = \int_0^{\pi/2}\frac{d\zeta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\zeta}}, \tag{6.145}
$$

$$
\mathsf{E}(k) = \int_0^{\pi/2}d\zeta\sqrt{1-k^2\sin^2\zeta}. \tag{6.146}
$$

Como $\hat{\mathbf{e}}_y = \hat{\mathbf{e}}_\phi$ no plano $\phi = 0$, de (6.136) resulta que a função de Green será

$$G_0(R,Z;R',Z') = \frac{\mu_0}{\pi k}\sqrt{RR'}\left[\left(1-\frac{k^2}{2}\right)\mathsf{K}(k) - \mathsf{E}(k)\right]. \tag{6.147}$$

Uma vez conhecida a função de Green, a solução da equação inomogênea para todos os pontos do plano é dada por (6.131), na qual as integrais podem ser feitas numericamente usando técnicas convencionais.

6.11 Equilíbrio MHD com rotação estacionária

Vários problemas de interesse para a física de plasmas de fusão e astrofísicos envolvem algum tipo de rotação. Em sistemas de confinamento magnético, por exemplo, o uso de um tipo de geração não-indutiva de corrente chamado injeção de partículas neutras faz com que o plasma entre em rotação, como decorrência da transferência de momentum linear das partículas do feixe que é injetado no plasma. Resultados experimentais em tokamaks [56, 57] e configurações de campo reverso [58] indicam velocidades de rotação bastante altas (supersônicas). Em astrofísica, a descrição de estrelas também pode envolver o estudo de plasmas em rotação.

Se as quantidades de interesse físico não dependerem explicitamente do tempo, como por exemplo numa rotação com velocidade constante ao longo da direção azimutal, é possível empregar as equações do equilíbrio MHD estacionário, como vimos no Cap. 4. Recordamos que tais equações são, para a MHD ideal, dadas por

$$\nabla \cdot (\rho\mathbf{v}) = 0, \tag{6.148}$$

$$\rho(\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{v} = -\nabla p + \mathbf{J}\times\mathbf{B} + \rho\mathbf{g}, \tag{6.149}$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0 \tag{6.150}$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0\mathbf{J}, \tag{6.151}$$

$$\mathbf{E} + \mathbf{v}\times\mathbf{B} = \mathbf{0}. \tag{6.152}$$

No presente capítulo estamos estudando equilíbrios MHD com simetria axial, de modo que continuaremos empregando coordenadas cilíndricas-II (R, Z, ϕ), onde as quantidades de interesse físico não dependem do ângulo azimutal ϕ, por hipótese.

Capítulo 7

Equilíbrio MHD em Tokamaks

Enquanto as coordenadas cilíndricas-II se prestam melhor à descrição de configurações do tipo toróide compacto, as coordenadas pseudo-toroidais são mais convenientes em equilíbrios MHD de tokamaks.

7.1 Equação de equilíbrio MHD em coordenadas pseudo-toroidais

As coordenadas pseudo-toroidais, ou locais, são (r,θ,φ), definidas por meio das seguintes relações em termos das coordenadas cilíndricas-II (R,Z,ϕ):

$$R = R_0 + r\cos\theta, \tag{7.1}$$
$$Z = r\sin\theta, \tag{7.2}$$

onde R_0 é o raio maior do toróide, de forma que $R = R_0$ identifica o eixo menor do mesmo, enquanto o eixo Z é o chamado eixo maior [Fig. 7.1]. Nesse caso (r,θ) são as coordenadas polares de um ponto na seção reta do toróide, que é um círculo de raio $r = a$, chamado raio menor. Assim $0 \leq r \leq a$, enquanto o ângulo poloidal θ, bem como o ângulo toroidal φ, pertencem ao intervalo $[0,2\pi)$.

Invertendo as relações (7.1)-(7.2) temos que

$$r = \left\{(R-R_0)^2 + Z^2\right\}^{1/2}, \tag{7.3}$$
$$\theta = \arctan\left(\frac{Z}{R-R_0}\right) \tag{7.4}$$

Estas relações nos permitem expressar as derivadas das coordenadas pseudo-toroidais

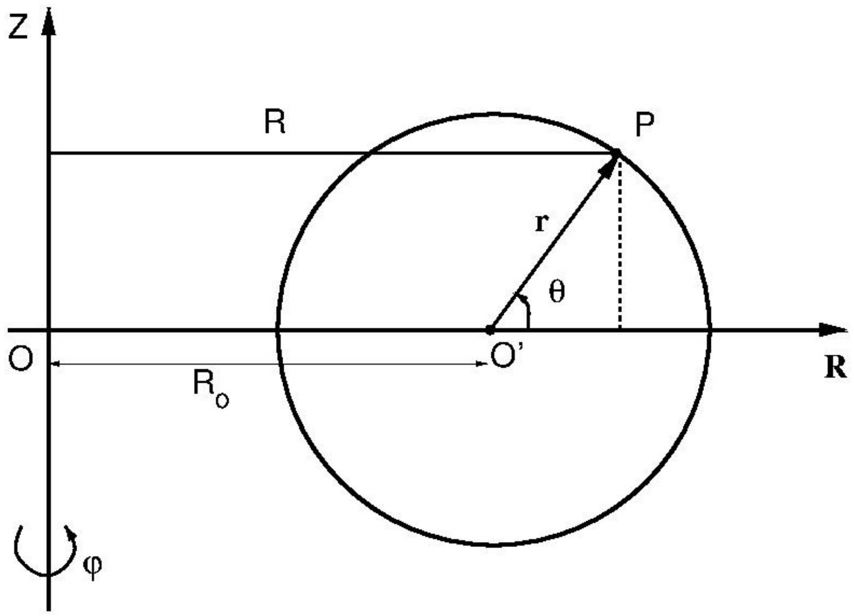

Figura 7.1: Coordenadas pseudo-toroidais

em relação às coordenadas cilíndricas-II:

$$\frac{\partial r}{\partial R} = \frac{2(R-R_0)}{2\left\{(R-R_0)^2+Z^2\right\}^{1/2}} = \frac{R-R_0}{r} = \cos\theta, \tag{7.5}$$

$$\frac{\partial r}{\partial Z} = \frac{2Z}{2\left\{(R-R_0)^2+Z^2\right\}^{1/2}} = \frac{Z}{r} = \sin\theta, \tag{7.6}$$

$$\frac{\partial\theta}{\partial R} = \frac{-Z(R-R_0)^{-2}}{1+Z^2/(R-R_0)^2} = -\frac{Z}{r^2} = -\frac{\sin\theta}{r}, \tag{7.7}$$

$$\frac{\partial\theta}{\partial Z} = \frac{(R-R_0)^{-1}}{1+Z^2/(R-R_0)^2} = \frac{R-R_0}{r^2} = \frac{\cos\theta}{r}, \tag{7.8}$$

o que leva-nos às seguintes derivadas em relação às coordenadas pseudo-toroidais:

$$\frac{\partial}{\partial R} = \frac{\partial r}{\partial R}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial\theta}{\partial R}\frac{\partial}{\partial\theta} = \cos\theta\frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}, \tag{7.9}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial R^2} = \cos^2\theta\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2\sin\theta\cos\theta}{r^2}\frac{\partial}{\partial\theta} - \frac{2\sin\theta\cos\theta}{r}\frac{\partial^2}{\partial r\partial\theta} + \frac{\sin^2\theta}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\sin^2\theta}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} \tag{7.10}$$

$$\frac{\partial}{\partial Z} = \frac{\partial r}{\partial Z}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial\theta}{\partial Z}\frac{\partial}{\partial\theta} = \sin\theta\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}, \tag{7.11}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial Z^2} = \sin^2\theta\frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{2\sin\theta\cos\theta}{r^2}\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{2\sin\theta\cos\theta}{r}\frac{\partial^2}{\partial r\partial\theta} + \frac{\cos^2\theta}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos^2\theta}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} \tag{7.12}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial R^2} + \frac{\partial^2}{\partial Z^2} = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}. \tag{7.13}$$

Com o objetivo de obter a equação de equilíbrio MHD em coordenadas pseudo-toroidais, partimos da equação de Grad-Shafranov (6.56) em coordenadas cilíndricas-

II,

$$\frac{\partial^2\Psi}{\partial R^2} - \frac{1}{R}\frac{\partial\Psi}{\partial R} + \frac{\partial^2\Psi}{\partial Z^2} = -\mu_0 R^2 p'(\Psi) - \frac{1}{2}\mu_0^2 (I^2)'(\Psi), \tag{7.14}$$

onde $\Psi(R,Z)$ é a função de fluxo poloidal, p é a pressão e I é a função de corrente poloidal. Substituindo (7.1), (7.9), e (7.13) resulta

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^2\Psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\Psi}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\Psi}{\partial\theta^2} - \frac{1}{R_0 + r\cos\theta}\left(\cos\theta\frac{\partial\Psi}{\partial r} - \frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial\Psi}{\partial\theta}\right) = \\
&= -\mu_0(R_0 + r\cos\theta)^2 p'(\Psi) - \frac{1}{2}\mu_0^2(I^2)'(\Psi).
\end{aligned} \tag{7.15}$$

Observe que, como $\Psi(r,\theta)$ e $I(r,\theta)$ não dependem explicitamente de φ, este também é um exemplo de equilíbrio bidimensional com simetria axial.

Recordando que as componentes do campo magnético em coordenadas cilíndricas-II são dadas por (6.9),(6.10), e (6.44):

$$B_R = -\frac{1}{R}\frac{\partial\Psi}{\partial Z}, \tag{7.16}$$

$$B_Z = \frac{1}{R}\frac{\partial\Psi}{\partial R}, \tag{7.17}$$

$$B_\phi = -\frac{\mu_0 I}{R}, \tag{7.18}$$

é possível obter as respectivas componentes em coordenadas pseudo-toroidais. Usando as expressões (A.74)-(A.76) do Apêndice A para os vetores de base neste sistema, concluimos que

$$B_r = \cos\theta B_R + \sin\theta B_Z, \tag{7.19}$$

$$B_\theta = -\sin\theta B_R + \cos\theta B_Z \tag{7.20}$$

$$B_\varphi = B_\phi. \tag{7.21}$$

Substituindo, agora, as relações (7.1), (7.9), e (7.11) obtemos

$$B_r = -\frac{1}{r(R_0 + r\cos\theta)}\frac{\partial\Psi}{\partial\theta} \tag{7.22}$$

$$B_\theta = \frac{1}{R_0 + r\cos\theta}\frac{\partial\Psi}{\partial r} \tag{7.23}$$

$$B_\varphi = -\frac{\mu_0 I}{R_0 + r\cos\theta}. \tag{7.24}$$

Procedendo de forma análoga para as componentes da densidade de corrente (6.48),(6.49),(7.73)

$$J_R = -\frac{1}{R}\frac{\partial I}{\partial Z} \tag{7.25}$$

$$J_Z = \frac{1}{R}\frac{\partial I}{\partial R}, \tag{7.26}$$

$$J_\phi = -R^2 p'(\Psi) - \frac{\mu_0}{2}(I^2)'(\Psi), \tag{7.27}$$

obtemos, no sistema pseudo-toroidal, que

$$J_r = -\frac{1}{r(R_0 + r\cos\theta)}\frac{\partial I}{\partial\theta} \tag{7.28}$$

$$J_\theta = \frac{1}{R_0 + r\cos\theta}\frac{\partial I}{\partial r} \tag{7.29}$$

$$J_\varphi = -(R_0 + r\cos\theta)^2 p'(\Psi) - \frac{\mu_0}{2}(I^2)'(\Psi). \tag{7.30}$$

7.2 Solução perturbativa

Não se conhecem soluções exatas da equação (**??**) para quaisquer escolhas de perfil. No entanto, podemos empregar um método perturbativo para encontrar uma solução aproximada que seja válida para Tokamaks. Sendo R_0 o raio do eixo geométrico e a o raio da fronteira do plasma (isto é, da última superfície magnética fechada), definimos a razão de aspecto como

$$\mathcal{A} = \frac{R_0}{a}. \tag{7.31}$$

Um toróide compacto tem razão de aspecto muito pequena, visto que R_0 é comparável ao valor de a. Em tokamaks, no entanto, esta razão de aspecto é tipicamente menor. Quanto maior for a razão de aspecto menor a curvatura toroidal, e tanto melhor será tratar o sistema como sendo um cilindro periódico (de comprimento $2\pi R_0$). Neste último caso teremos um equilíbrio MHD com simetria translacional, do tipo que analisamos no Capítulo anterior para configurações do tipo "theta-pinch" e "z-pinch", por exemplo. Podemos usar, então, esta solução cilíndrica $\Psi_0(r,\theta)$ como uma aproximação de ordem zero para a solução toroidal.

Introduzimos um parâmetro "pequeno", que é o inverso da razão de aspecto:

$$\varepsilon = \frac{1}{\mathcal{A}} = \frac{a}{R_0}, \tag{7.32}$$

de modo que procuraremos a solução da equação de Grad-Shafranov na forma de uma série perturbativa em potências deste parâmetro:

$$\Psi(r,\theta) = \Psi_0(r,\theta) + \Psi_1(r,\theta) + \Psi_2(r,\theta) + \ldots. \tag{7.33}$$

onde Ψ_0 não depende de ε, Ψ_1 é da ordem de ε, etc.

Resultados satisfatórios já são obtidos com termos de primeira ordem em ε. Substituindo em (**??**) obtemos

$$\begin{aligned} R_0^2 \left[\frac{\partial^2\Psi_0}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\Psi_0}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial\Psi_1}{\partial\theta^2} + \frac{\partial^2\Psi_1}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\Psi_1}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial\Psi_1}{\partial\theta^2}\right] - \\ -\frac{R_0}{R_0 + r\cos\theta}\left[\cos\theta\frac{\partial\Psi_0}{\partial r} - \frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial\Psi_0}{\partial\theta} + \cos\theta\frac{\partial\Psi_1}{\partial r} - \frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial\Psi_1}{\partial\theta}\right] = \\ = -\mu_0 R_0^2 (R_0 + r\cos\theta)^2 p'(\Psi_0 + \Psi_1) - \frac{1}{2}\mu_0^2 R_0^2 (I^2)'(\Psi_0 + \Psi_1). \end{aligned} \tag{7.34}$$

Os perfis para p e I também podem ser expandidos em série de potências:

$$p(\Psi_0 + \Psi_1) = p(\Psi_0) + \Psi_1 p'(\Psi_0), \tag{7.35}$$

$$I(\Psi_0 + \Psi_1) = I(\Psi_0) + \Psi_1 I'(\Psi_0). \tag{7.36}$$

de forma que o segundo membro de (7.128) fica

$$
\begin{aligned}
&-\mu_0 R_0^4\left(1+\frac{r}{R_0}\cos\theta\right)^2\left[p'(\Psi_0)+\Psi_1 p''(\Psi_0)\right]- \\
&\mu_0^2 R_0^2\left[I(\Psi_0)+\Psi_1 I'(\Psi_0)\right]\left[I'(\Psi_0)+\Psi_1 I''(\Psi_0)\right].
\end{aligned}
\tag{7.37}
$$

A expansão em uma série perturbativa da equação de equilíbrio MHD em coordenadas pseudo-toroidais nos conduziu à equação (7.128) que, com (7.37), pode ser reescrita como

$$
\begin{aligned}
&R_0^2\left[\frac{\partial^2\Psi_0}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\Psi_0}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial\Psi_0}{\partial\theta^2}\right]-\frac{R_0^2}{R_0+r\cos\theta}\left[\cos\theta\frac{\partial\Psi_0}{\partial r}-\frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial\Psi_0}{\partial\theta}\right]+ \\
&R_0^2\left[\frac{\partial^2\Psi_1}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\Psi_1}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial\Psi_1}{\partial\theta^2}\right]-\frac{R_0^2}{R_0+r\cos\theta}\left[\cos\theta\frac{\partial\Psi_1}{\partial r}-\frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial\Psi_1}{\partial\theta}\right]= \\
&=-\mu_0 R_0^4\left[p'(\Psi_0)+\Psi_1 p''(\Psi_0)+2\frac{r}{R_0}p'(\Psi_0)+2\frac{r}{R_0}p''(\Psi_0)\Psi_1\cos\theta\right]- \\
&\mu_0^2 R_0^2\left[I(\Psi_0)I'(\Psi_0)+\Psi_1 I(\Psi_0)I''(\Psi_0)+\Psi_1 I'^2(\Psi_0)\right]
\end{aligned}
\tag{7.38}
$$

onde usamos que, como $r \ll R_0$, vale a relação aproximada:

$$
\frac{R_0}{R_0+r\cos\theta}\approx 1-\frac{r}{R_0}\cos\theta. \tag{7.39}
$$

Neste apêndice vamos determinar a ordem (em potências do inverso da razão de aspecto ε) dos termos de (7.38) e separá-los de modo adequado. Como $r=a$ é um comprimento característico do sistema, então temos os seguintes ordenamentos:

$$
\left|R_0\frac{\partial\Psi}{\partial r}\right|\sim\frac{R_0}{a}\Psi\sim\frac{\Psi}{\varepsilon}, \tag{7.40}
$$

$$
\left|\frac{\partial\Psi}{\partial\theta}\right|\sim\Psi. \tag{7.41}
$$

lembrando que $\Psi_0\sim o(\varepsilon^0)$ e $\Psi_1\sim o(\varepsilon^1)$.

Assim, os termos de (7.38) têm as seguintes ordens perturbativas:

$$\left|R_0^2\left[\frac{\partial^2\Psi_0}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\Psi_0}{\partial r}\right]\right| \sim R_0^2\frac{1}{a}\frac{1}{a}a\frac{\Psi_0}{a} \sim \frac{\Psi_0}{\varepsilon^2} \sim o(\varepsilon^{-2}), \tag{7.42}$$

$$\left|R_0^2\left[\frac{\partial^2\Psi_1}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\Psi_1}{\partial r}\right]\right| \sim \frac{\Psi_1}{\varepsilon^2} \sim o(\varepsilon^{-1}), \tag{7.43}$$

$$\left|R_0^2\frac{1}{r^2}\frac{\partial\Psi_0}{\partial\theta}\right| \sim R_0^2\frac{1}{a^2}\Psi_0 \sim o(\varepsilon^{-2}), \tag{7.44}$$

$$\left|R_0^2\frac{1}{r^2}\frac{\partial\Psi_1}{\partial\theta}\right| \sim R_0^2\frac{1}{a^2}\Psi_1 \sim o(\varepsilon^{-1}), \tag{7.45}$$

$$\left|R_0\frac{\partial\Psi_0}{\partial r}\cos\theta\right| \sim \frac{R_0}{a}\Psi_0 \sim o(\varepsilon^{-1}), \tag{7.46}$$

$$\left|R_0\frac{1}{r}\frac{\partial\Psi_0}{\partial\theta}\sin\theta\right| \sim \frac{R_0}{a}\Psi_0 \sim o(\varepsilon^{-1}), \tag{7.47}$$

$$\left|R_0\frac{\partial\Psi_1}{\partial r}\cos\theta\right| \sim \frac{R_0}{a}\Psi_1 \sim o(\varepsilon^{0}), \tag{7.48}$$

$$\left|R_0\frac{1}{r}\frac{\partial\Psi_1}{\partial\theta}\sin\theta\right| \sim \frac{R_0}{a}\Psi_1 \sim o(\varepsilon^{0}), \tag{7.49}$$

$$\left|R_0\frac{\partial\Psi_0}{\partial r}\cos\theta\right| \sim R_0\frac{1}{a}\Psi_0 \sim o(\varepsilon^{-1}), \tag{7.50}$$

$$\left|R_0\frac{r}{R_0}\frac{\partial\Psi_0}{\partial r}\cos^2\theta\right| \sim R_0\frac{a}{\varepsilon}\frac{1}{a}\Psi_0 \sim o(\varepsilon^{0}), \tag{7.51}$$

$$\left|R_0\frac{1}{r}\frac{\partial\Psi_0}{\partial\theta}\sin\theta\right| \sim R_0\frac{1}{a}\Psi_0 \sim o(\varepsilon^{-1}), \tag{7.52}$$

$$\left|R_0\frac{r}{R_0}\frac{1}{r}\frac{\partial\Psi_0}{\partial\theta}\sin\theta\cos\theta\right| \sim \frac{a}{R_0}\frac{R_0}{a}\Psi_0 \sim o(\varepsilon^{0}), \tag{7.53}$$

$$\left|R_0\frac{\partial\Psi_1}{\partial r}\cos\theta\right| \sim R_0\frac{1}{a}\Psi_1 \sim o(\varepsilon^{0}), \tag{7.54}$$

$$\left|R_0\frac{1}{r}\frac{\partial\Psi_1}{\partial\theta}\sin\theta\right| \sim R_0\frac{1}{a}\Psi_1 \sim o(\varepsilon^{0}), \tag{7.55}$$

$$\left|R_0\frac{r}{R_0}\frac{1}{r}\frac{\partial\Psi_1}{\partial\theta}\sin\theta\cos\theta\right| \sim R_0\frac{a}{R_0}\frac{1}{a}\Psi_1 \sim o(\varepsilon^{1}), \tag{7.56}$$

$$\left|R_0^4p'(\Psi_0)\right| \sim o(\varepsilon^{-2}) \tag{7.57}$$

$$\left|R_0^4\Psi_1p''(\Psi_0)\right| \sim o(\varepsilon^{-2})\times o(\varepsilon^{0}) \sim o(\varepsilon^{1}), \tag{7.58}$$

$$\left|2R_0^4\frac{r}{R_0}p'(\Psi_0)\cos\theta\right| \sim \frac{a}{R_0}o(\varepsilon^{-2}) \sim o(\varepsilon^{1})\times o(\varepsilon^{-2}) \sim o(\varepsilon^{-1}), \tag{7.59}$$

$$\left|2R_0^4\frac{r}{R_0}p''(\Psi_0)\Psi_1\cos\theta\right| \sim \frac{a}{R_0}\Psi_1 o(\varepsilon^{-2}) \sim o(\varepsilon^{-2})\times o(\varepsilon^{0})\times o(\varepsilon^{1}) \sim o(\varepsilon^{0}), \tag{7.60}$$

$$\left|R_0^2I(\Psi_0)I'(\Psi_0)\right| \sim o(\varepsilon^{-2}) \tag{7.61}$$

$$\left|R_0^2\Psi_1I(\Psi_0)I''(\Psi_0)\right| \sim o(\varepsilon^{1})\times o(\varepsilon^{-2}) \sim o(\varepsilon^{-1}), \tag{7.62}$$

$$\left|R_0^2\Psi_1I'^2(\Psi_0)\right| \sim o(\varepsilon^{1})\times o(\varepsilon^{-2}) \sim o(\varepsilon^{-1}), \tag{7.63}$$

Como ε é um número pequeno, os termos de menor ordem na expansão perturbativa serão aqueles $o(\varepsilon^{-2})$ e $o(\varepsilon^{-1})$, ao passo que os termos de maior ordem $o(\varepsilon^{0})$ e $o(\varepsilon^{1})$ podem ser desprezados para $\varepsilon \ll 1$. Coletando os termos de ordem mais baixa $o(\varepsilon^{-2})$ temos

$$R_0^2\left[\frac{\partial^2\Psi_0}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\Psi_0}{\partial r}\right]+\frac{R_0^2}{r^2}\frac{\partial\Psi_0}{\partial\theta^2}=-\mu_0R_0^4p'(\Psi_0)-\mu_0^2R_0^2I(\Psi_0)I'(\Psi_0). \tag{7.64}$$

Fazendo o mesmo com os termos de ordem $o(\varepsilon^{-1})$ é

$$\begin{aligned}&R_0^2\left[\frac{\partial^2\Psi_1}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\Psi_1}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial\Psi_1}{\partial\theta^2}\right]-R_0\cos\theta\frac{\partial\Psi_0}{\partial r}+\\&R_0\frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial\Psi_0}{\partial\theta}=-\mu_0R_0^4\left[\Psi_1p''(\Psi_0)+2\frac{r}{R_0}p'(\Psi_0)\cos\theta\right]-\\&-\mu_0^2R_0^2\left[\Psi_1I(\Psi_0)I''(\Psi_0)+\Psi_1I'^2(\Psi_0)\right].\end{aligned} \tag{7.65}$$

7.3 Solução de ordem zero

Na seção anterior nós estimamos a ordem de todos os termos da equação (7.128). Dessa forma obtemos equações para os termos de menor ordem. O caso mais simples é aquele onde o termo de ordem mais baixa (ordem zero em ε) representa um equilíbrio MHD com simetria cilíndrica, portanto $\Psi_0=\Psi_0(r)$, o qual não dependerá de θ. As superfícies magnéticas serão cilindros concêntricos ao eixo magnético, e a coordenada z dos mesmos estará relacionada ao ângulo toroidal por $z=R_0\varphi$. De (7.64) teremos, para os termos de ordem mais baixa, a seguinte equação de equilíbrio

$$\frac{d^2\Psi_0}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{d\Psi_0}{dr}=-\mu_0R_0^2p'(\Psi_0)-\mu_0^2I(\Psi_0)I'(\Psi_0). \tag{7.66}$$

Para que esta equação possa ser resolvida precisaríamos especificar os perfis da pressão

$$p_0(r)=p(\Psi_0(r)),$$

e da função de corrente $I(\Psi_0(r))$. Extraindo o termo de ordem mais baixa das equações (7.78)-(7.80) obtemos as componentes do campo magnético na aproximação cilíndrica, que são:

$$B_{r0}=-\frac{1}{rR_0}\frac{\partial\Psi_0}{\partial\theta}=0 \tag{7.67}$$

$$B_{\theta 0}(r)=\frac{1}{R_0}\frac{d\Psi_0}{dr} \tag{7.68}$$

$$B_{\varphi 0}(r)=-\frac{\mu_0I(\Psi_0(r))}{R_0}, \tag{7.69}$$

donde a função de fluxo de ordem mais baixa é

$$\Psi_0(r)=R_0\int^r B_{\theta 0}(r')dr', \tag{7.70}$$

e a função de corrente correspondente

$$I_0(r)=I(\Psi_0(r))=-\frac{R_0}{\mu_0}B_{\varphi 0}(r). \tag{7.71}$$

7.4 Solução de primeira ordem

Os termos de primeira ordem em ε satisfazem a equação (7.65):

$$R_0^2\left[\frac{\partial^2\Psi_1}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\Psi_1}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial\Psi_1}{\partial\theta^2}\right]-R_0\cos\theta\frac{\partial\Psi_0}{\partial r}=$$
$$-\mu_0R_0^4\Psi_1p''(\Psi_0)-2\mu_0R_0^3r\cos\theta p'(\Psi_0)-\mu_0^2R_0^2\Psi_1[I'(\Psi_0)I(\Psi_0)]', \tag{7.72}$$

onde $p(\Psi_0)=p_0(r)$, etc. são obtidas a partir da aproximação cilíndrica. Usando a regra da cadeia reescrevemos a expressão acima como

$$R_0^2\left[\frac{\partial^2\Psi_1}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\Psi_1}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial\Psi_1}{\partial\theta^2}\right]+\frac{d}{dr}\left[\mu_0R_0^4p'(\Psi_0)+\mu_0^2R_0^2I'(\Psi_0)I(\Psi_0)\right]\times$$
$$\frac{dr}{d\Psi_0}\Psi_1=2\mu_0R_0^3r\cos\theta p'(\Psi_0)+R_0\cos\theta\frac{d\Psi_0}{dr} \tag{7.73}$$

Para resolver (7.73) faremos o seguinte "ansatz" para a correção de primeira ordem à função de fluxo poloidal:

$$\Psi_1(r,\theta)=-\Delta(r)\frac{d\Psi_0}{dr}\cos\theta. \tag{7.74}$$

onde $\Delta(r)$ é uma função a ser determinada. Substituindo (7.74) em (7.73) obteremos a seguinte equação diferencial envolvendo esta função:

$$-R_0^2\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{d\Psi_0}{dr}\frac{d\Delta}{dr}\right)-R_0^2\Delta\frac{d}{dr}\left[\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{d\Psi_0}{dr}\right)\right]-$$
$$-R_0^2\frac{d^2\Psi_0}{dr^2}\frac{d\Delta}{dr}-\frac{d}{dr}\left\{\mu_0R_0^4p'(\Psi_0)+\mu_0^2R_0^2I(\Psi_0)I'(\Psi_0)\right\}\Delta=$$
$$=-2\mu_0R_0^3rp'(\Psi_0)+R_0\frac{d\Psi_0}{dr} \tag{7.75}$$

O termo entre chaves desaparece quando usamos a equação de ordem mais baixa (7.66), o que nos deixa com

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left[r\left(\frac{d\Psi_0}{dr}\right)^2\frac{d\Delta}{dr}\right]=2\mu_0rR_0\frac{d\Psi_0}{dr}\frac{dp}{d\Psi_0}-\frac{1}{R_0}\left(\frac{d\Psi_0}{dr}\right)^2. \tag{7.76}$$

O campo magnético poloidal na aproximação cilíndrica (de ordem mais baixa) é dado, em termos de $\Psi_0(r)$, por (7.68), de forma que (7.84) torna-se

$$\frac{d}{dr}\left[rB_{\theta0}{}^2\frac{d\Delta}{dr}\right]=\frac{r}{R_0}\left(2\mu_0r\frac{dp_0}{dr}-B_{\theta0}{}^2\right). \tag{7.77}$$

que pode ser resolvida para $\Delta(r)$ se conhecermos "a priori" os perfis $p(r)$ e $B_{\theta0}(r)$ para o sistema na aproximação cilíndrica. Isto será detalhado na próxima sub-seção.

Considerando, então, a solução da equação de equilíbrio até a primeira ordem, as componentes dos campos magnéticos serão:

$$B_r=-\frac{1}{r(R_0+r\cos\theta)}\frac{\partial\Psi_1}{\partial\theta} \tag{7.78}$$

$$B_\theta=\frac{1}{R_0+r\cos\theta}\left(\frac{d\Psi_0}{dr}+\frac{\partial\Psi_1}{\partial r}\right) \tag{7.79}$$

$$B_\phi=-\frac{\mu_0 I}{R_0+r\cos\theta}, \tag{7.80}$$

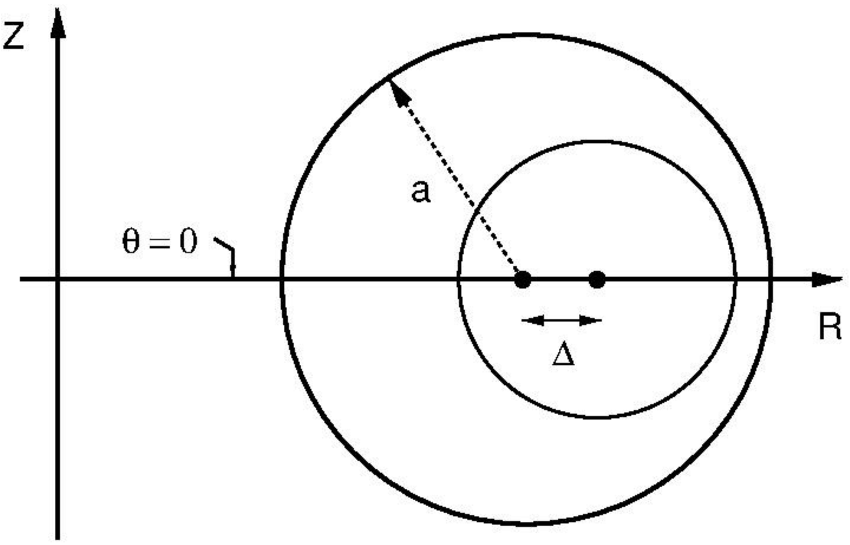

Figura 7.2: Deslocamento das superfícies magnéticas em relação à fronteira do plasma.

e as componentes (físicas) da densidade de corrente,

$$J_r = -\frac{1}{r(R_0 + r\cos\theta)}\frac{\partial I}{\partial\theta} \tag{7.81}$$

$$J_\theta = \frac{1}{R_0 + r\cos\theta}\frac{\partial I}{\partial r} \tag{7.82}$$

$$J_\phi = -(R_0 + r\cos\theta)^2 p' - \frac{\mu_0}{2}(I^2)'. \tag{7.83}$$

7.5 Deslocamento de Shafranov

A correção em primeira ordem da função de fluxo (7.74), no plano equatorial ($\theta = 0$), é $\Psi_1(r,0) = -\Delta(r)\Psi'_0$, de modo que

$$\Psi(r,0) = \Psi_0(r) - \Delta(r)\Psi'_0 \approx \Psi_0(r - \Delta(r)). \tag{7.84}$$

Portanto o fator $\Delta(r)$ representa um deslocamento da superfície magnética, ou seja, a distância entre seu centro O' e o eixo geométrico O [Fig. 7.4]. Então $\Delta_s = \Delta(r = 0)$, chamado deslocamento de Shafranov, é o deslocamento do eixo magnético (superfície magnética de volume nulo) em relação ao eixo geométrico ($r = 0$). A função $\Delta(r)$ será obtida por integração numérica da equação diferencial (7.84) desde o eixo magnético até uma posição genérica dentro do plasma ($r < a$), com as seguintes condições de contorno:

- $\Delta(r = a) = 0$: o deslocamento das superfícies magnéticas é nulo na borda do plasma, uma vez que usualmente a fronteira do plasma confinado num tokamak é determinada por um limitador material, representado por um anel de raio $r = a$.

- $\left.\frac{d\Delta}{dr}\right|_{r=0} = 0$.

Integrando (7.84) para estas condições de contorno obtemos

$$\frac{d\Delta}{dr} = -\frac{r}{R_0}\left[\hat{\beta}_p(r) + \frac{1}{2}\hat{\ell}_i(r)\right], \tag{7.85}$$

onde definimos as seguintes integrais [49]

$$\hat{\beta}_p(r) = -\frac{2\mu_0}{r^2 B_{\theta 0}^2(r)} \int_0^r dr' r'^2 \frac{dp_0}{dr'}, \tag{7.86}$$

$$\hat{\ell}_i(r) = \frac{2}{r^2 B_{\theta 0}^2(r)} \int_0^r dr' r' B_{\theta 0}^2(r'). \tag{7.87}$$

O parâmetro beta poloidal do plasma é a razão entre as pressões cinética p_0 e magnética associada ao campo poloidal $B_{\theta 0}$. Como ambas quantidades variam ao longo da coluna de plasma é conveniente definir o beta poloidal da seguinte maneira:

$$\beta_p = \frac{\overline{p}_0}{B_{\theta a}^2/2\mu_0}, \tag{7.88}$$

onde a pressão média ao longo de uma coluna cilíndrica de raio r é

$$\overline{p}_0 = \frac{\int dS\, p_0(r)}{\pi r^2} = \frac{\int_0^r dr' r' p_0(r')}{r^2/2}. \tag{7.89}$$

Integrando por partes o numerador obtemos

$$\overline{p}_0 = p_0(r) - \frac{1}{r^2}\int_0^r dr' r'^2 \frac{dp_0}{dr'}, \tag{7.90}$$

tal que (7.88) torne-se

$$\beta_p = \frac{2\mu_0}{B_{\theta 0}^2(a)}\left\{p_0(r) - \frac{1}{r^2}\int_0^r dr' r'^2 \frac{dp_0}{dr'}\right\} = \frac{2\mu_0 p_0(r)}{B_{\theta 0}^2(a)} + \hat{\beta}_p, \tag{7.91}$$

onde usamos (7.86). Observe que $\hat{\beta}_p)a) = \beta_p$.

Calculando a integral (7.102) no ponto $r = a$ temos

$$\hat{\ell}_i(a) = \frac{\overline{B}_{\theta 0}^2(a)/2\mu_0}{B_{\theta 0}^2(a)/2\mu_0} \tag{7.92}$$

que podemos identificar como a indutância interna do plasma por unidade de comprimento, a qual é definida em termos da energia magnética média associada ao campo poloidal.

Avaliando (7.85) na borda do plasma teremos, então

$$\left.\frac{d\Delta}{dr}\right|_{r=a} = -\frac{a}{R_0}\left(\beta_p + \frac{1}{2}\ell_i\right) = -\frac{a}{R_0}(\Lambda + 1), \tag{7.93}$$

onde definimos o parâmetro de assimetria de Shafranov:

$$\Lambda = \beta_p + \frac{\ell_i}{2} - 1. \tag{7.94}$$

.

Podemos integrar novamente (7.85) e obter diretamente a função $\Delta(r)$ como

$$\Delta(r) = \frac{1}{R_0}\int_r^a dr' r' \left[\hat{\beta}_p(r') + \frac{1}{2}\hat{\ell}_i(r')\right]. \tag{7.95}$$

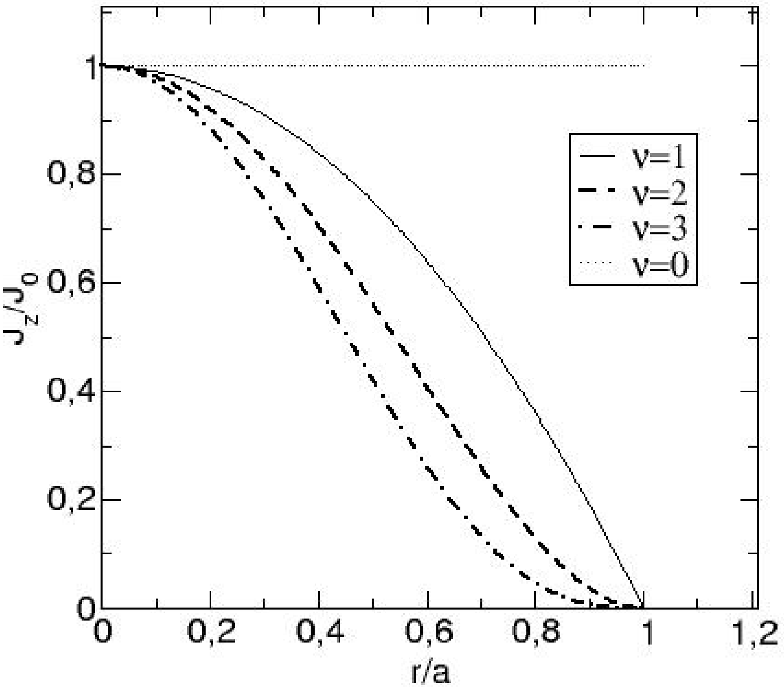

Figura 7.3: Perfis para a densidade de corrente normalizada, para alguns valores do parâmetro ν

7.6 Perfis radiais na aproximação cilíndrica

Vamos considerar, à guisa de exemplo, os seguintes perfis para a pressão e densidade de corrente na aproximação cilíndrica [Fig. 7.3]

$$\mathbf{J}(r) = \begin{cases} J_0\left(1-\frac{r^2}{a^2}\right)^{\nu}\hat{\mathbf{e}}_z & \text{se } 0<r<a \\ \mathbf{0} & \text{se } r>a. \end{cases}, \tag{7.96}$$

$$p_0(r) = \begin{cases} \hat{p}_0\left(1-\frac{r^2}{a^2}\right)^{\gamma} & \text{se } 0<r<a \\ 0 & \text{se } r>a. \end{cases}. \tag{7.97}$$

onde ν e γ são parâmetros cujos valores serão tomados como inteiros não-negativos. A corrente total de plasma é obtida a partir de (7.6) como

$$I_p = \int dS J_z = 2\pi \int_0^a dr\, r J_z(r) = \frac{\pi J_0 a^2}{\nu+1}. \tag{7.98}$$

O campo magnético poloidal é obtido a partir da componente z da lei de Ampère (4.12):

$$B_\theta(r) = \frac{\mu_0}{r}\int_0^r dr' r' J_z(r'), \tag{7.99}$$

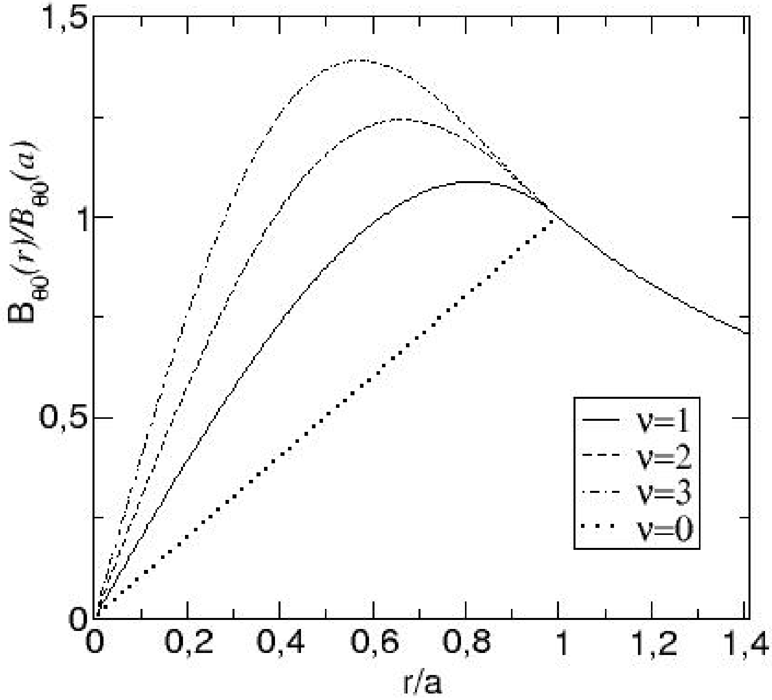

Figura 7.4: Perfis para o campo magnético poloidal normalizado para alguns valores do parâmetro ν

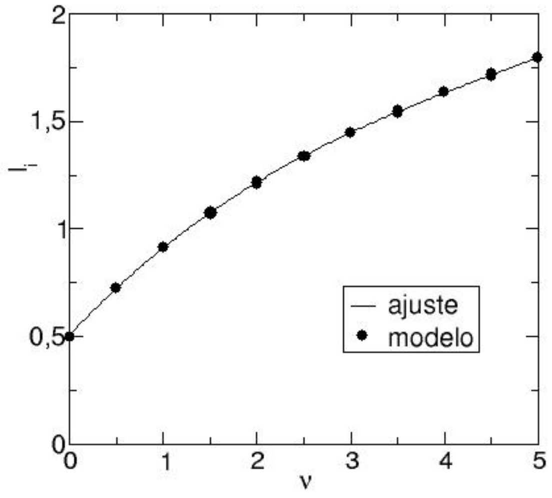

Figura 7.5: Auto-indutância por unidade de comprimento em função do parâmetro ν

onde a densidade de corrente é dada em (4.73). Obtemos daí [Fig. 7.4]

$$B_{\theta 0}(r) = \begin{cases} B_{\theta 0}(a)\frac{a}{r}\left[1-\left(1-\frac{r^2}{a^2}\right)^{\nu+1}\right] & \text{se } 0 \le r \le a \\ B_{\theta 0}(a)\frac{a}{r} & \text{se } r \ge a. \end{cases}, \tag{7.100}$$

onde o campo poloidal na borda do plasma é

$$B_{\theta 0}(a) = \frac{\mu_0 J_0 a}{2(\nu+1)} = \frac{B_{\theta 0}(r=0)}{\nu+1}. \tag{7.101}$$

Usando (7.100) a auto-indutância interna do plasma por unidade de comprimento, dada por (**??**), é [53]

$$\ell_i = 2\int_0^1 \frac{dx}{x}\left[1-\left(1-x^2\right)^{\nu+1}\right]^2 = \gamma + 2\psi(\nu+2) - \psi(3+2\nu), \tag{7.102}$$

onde $\gamma = 0,577216$ é a constante de Euler-Mascheroni e $\psi(z) = \Gamma'(z)/\Gamma(z)$ é a função digama. Na Fig. 7.5 mostramos o valor da auto-indutância em função do parâmetro ν calculado por meio de (7.102). Os valores obtidos podem ser convenientemente ajustados pelo seguinte polinômio de terceiro grau:

$$\ell_i = 0,509 + 0,462\nu - 0,06308\nu^2 + 0,004437\nu^3. \tag{7.103}$$

Analogamente, usando o perfil da pressão dado por (7.6) o valor do beta poloidal, dada por (7.104), é

$$\beta_p = \frac{2\mu_0 \hat{p}_0}{B_{\theta 0}^2(a)(\gamma+1)}. \tag{7.104}$$

Com a normalização $x = r/a$ a função Δ em (7.95) pode ser reescrita como

$$\frac{\Delta(x)}{a} = \frac{a}{R_0}\int_x^1 dx' x' \left[\hat{\beta}_p(x') + \frac{1}{2}\hat{\ell}_i(x')\right], \tag{7.105}$$

Parâmetro	Símbolo	Valor
raio menor	a	$0,180m$
raio maior	R_0	$0,615m$
corrente de plasma (max)	I_p	$100kA$
duração do plasma	τ_d	$150ms$
temperatura eletrônica	T_e	$400eV$
densidade de elétrons	n_e	$3\times10^{19}m^{-3}$
campo toroidal	B_T	$1,07T$

Tabela 7.1: Parâmetros do tokamak TCABR (Instituto de Física da Universidade de São Paulo).

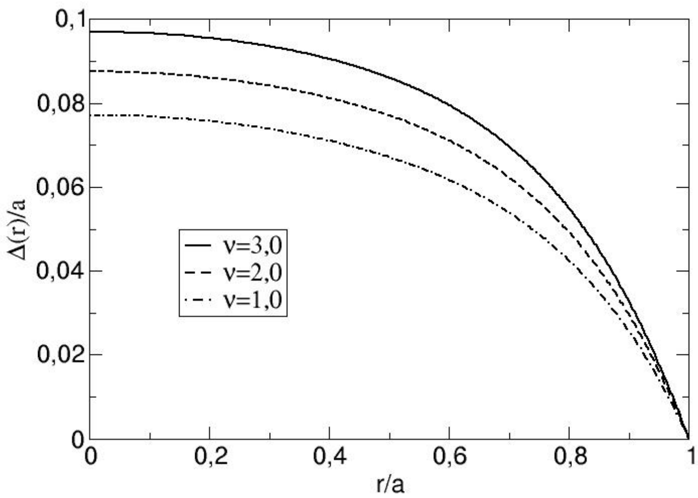

Figura 7.6: Deslocamento das superfícies magnéticas em função da posição radial, para parâmetros do tokamak TCABR (vide Tabela 7.1).

onde $\Delta(1)=0$ e $\Delta(0)=\Delta_s$ é o deslocamento de Shafranov. Usando os perfis de pressão e de densidade de corrente as funções no integrando são dadas por (7.86) e (7.102) como

$$\hat{\beta}_p(x) = 2\pi\gamma(\gamma+1)\beta_p\int_0^x dx' x'^3 (1-x'^2)^{\gamma-1}, \tag{7.106}$$

$$\hat{\ell}_i(x) = \frac{2}{\left[1-(1-x^2)^{\gamma+1}\right]^2}\int_0^x \frac{dx'}{x'}\left[1-(1-x'^2)^{\gamma+1}\right]^2 \tag{7.107}$$

onde o beta poloidal é dado por (7.104).

A integral (7.105) pode ser feita numericamente usando, por exemplo, o método de Romberg. Nos cálculos numéricos utilizamos parâmetros do tokamak TCABR, em operação no Instituto de Física da Universidade de São Paulo, conforme a Tabela 7.1. O inverso da razão de aspecto é $\varepsilon = a/R_0 \approx 0,29$, o valor do beta poloidal é $0,61$, o fator de segurança na borda do plasma é $q(a)\approx 5$ e os expoentes dos perfis de corrente e pressão são $\nu=3$ e $\gamma=1$, respectivamente.

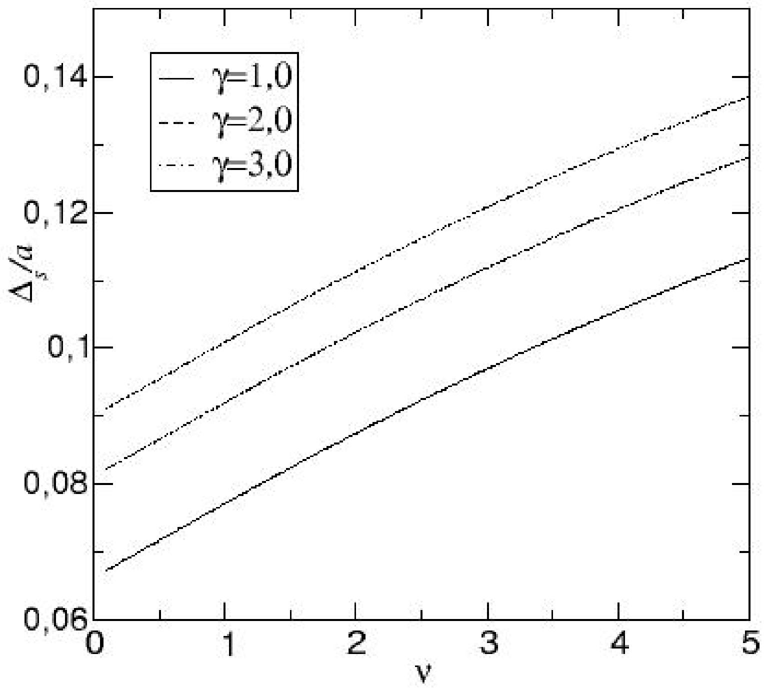

Figura 7.7: Deslocamento de Shafranov em função do expoente ν.

O valor de $\Delta(r)$, normalizado pelo raio do plasma a, é mostrado na Fig. 7.6 em função da razão r/a para diferentes valores dos expoentes ν com $\gamma = 1$. Para todos eles observamos que o deslocamento é máximo no eixo geométrico e decresce monotonicamente na medida em que nos aproximamos da borda do plasma, como requerido pelas condições de contorno. Quanto maior o valor de ν maior o deslocamento para um dado raio.

Estamos interessados, em particular, no deslocamento de Shafranov $\Delta_s = \Delta(0)$ que, de fato, aumenta com o expoente ν, bem como com o expoente do perfil da pressão γ [Fig. 7.7]. Observamos que este deslocamento pode chegar a 20% do raio do plasma. Para $\nu = 3$ e $\gamma = 1$, que são valores padrão para o tokamak TCABR, este deslocamento é de cerca de 15%.

Outro fator que interfere no valor do deslocamento de Shafranov é o beta poloidal (7.104), conforme a Fig. 7.8. Via de regra, quanto maior β_p maior é o valor de Δ_s, sendo esse efeito mais pronunciado para valores maiores dos expoentes ν e γ.

7.7 Fator de segurança na aproximação cilíndrica

No capítulo anterior definimos o fator de segurança das superfícies magnéticas toroidais pela expressão (6.21)

$$q = \frac{1}{2\pi} \oint \frac{1}{R} \frac{B_\phi}{B_p} ds. \tag{7.108}$$

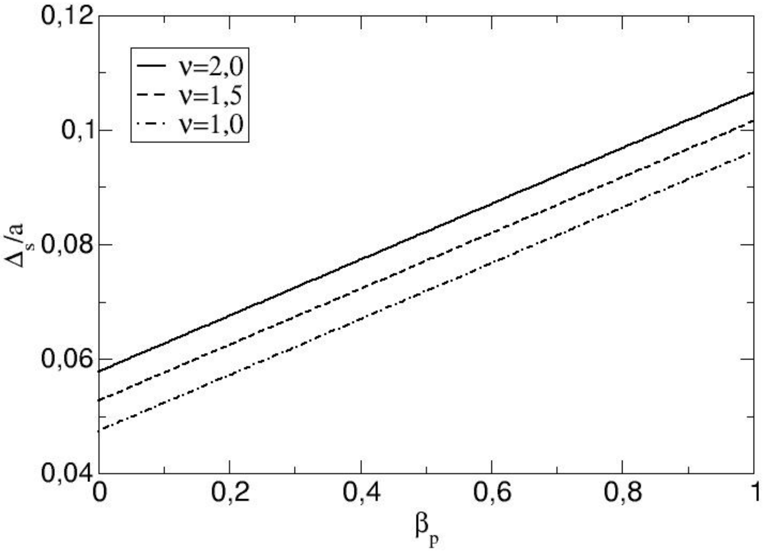

Figura 7.8: Deslocamento de Shafranov em função do beta poloidal.

onde $R = R_0 + r\cos\theta$, B_ϕ e $B_p = B_\theta$ representam os campos toroidal e poloidal, respectivamente.

Na aproximação cilíndrica (grande razão de aspecto) $1/R \approx 1/R_0$ e $ds = rd\theta$, de modo que

$$q = \frac{1}{2\pi}\frac{r}{R_0}\frac{B_{\phi 0}}{B_{\theta 0}}\oint d\theta, \tag{7.109}$$

pois as superfícies magnéticas, nesse caso, são cilindros coaxiais com $r = const.$. Portanto

$$q = \frac{r}{R_0}\frac{B_{\phi 0}}{B_{\theta 0}}. \tag{7.110}$$

O campo poloidal na aproximação cilíndrica, $B_{\theta 0}$, é dado por (7.100) e o campo toroidal $B_{\varphi 0}$ por (7.69). Portanto o fator de segurança será dado por

$$q(r) = \frac{a}{R_0}\frac{B_{\varphi 0}}{B_{\theta 0}(a)}\frac{r^2/a^2}{1-\left(1-\frac{r^2}{a^2}\right)^{1+\nu}}, \tag{7.111}$$

onde ν é o expoente do perfil para a densidade de corrente em (7.6).

Calculando em $r = a$ e usando (7.101) teremos o seguinte perfil para o fator de segurança na aproximação cilíndrica:

$$q(r) = q(a)\frac{r^2/a^2}{1-\left(1-\frac{r^2}{a^2}\right)^{1+\nu}}. \tag{7.112}$$

onde

$$q(a) = \frac{aB_{\phi 0}}{R_0 B_{\theta 0}(a)}. \tag{7.113}$$

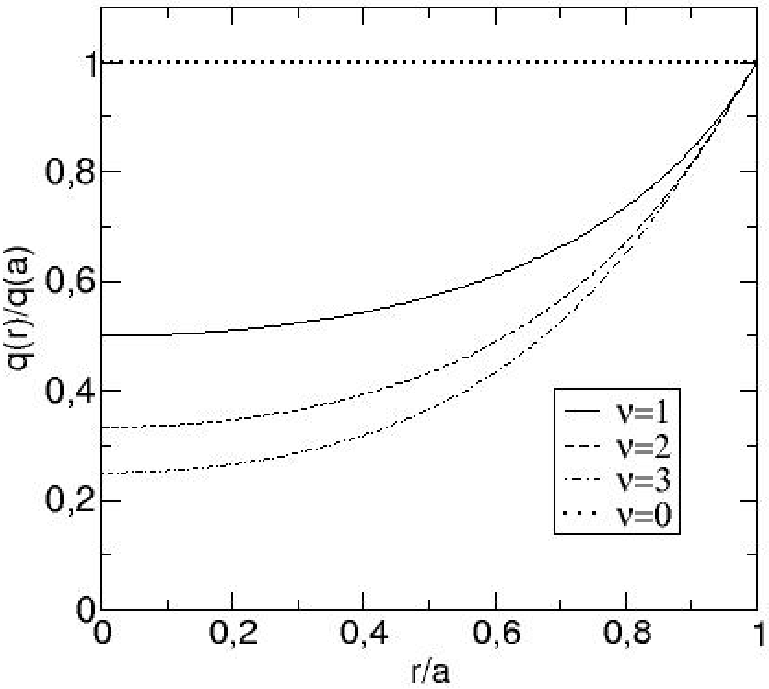

Figura 7.9: Perfil radial para o fator de segurança para alguns valores do parâmetro ν

é o valor de q na borda do plasma. Tomando o limite $r \to 0$, e usando a regra de L'Hospital, o fator de segurança no eixo magnético é dado por:

$$q(0) = \frac{q(a)}{1+\nu}. \tag{7.114}$$

Na Fig. 7.9 mostramos perfis radiais para o fator de segurança para alguns valores do parâmetro ν. Desde que $\nu \neq 0$, observamos ser este perfil monotonicamente crescente. No entanto, perfis não-monotônicos para o fator de segurança também podem ter aplicações interessantes na física de tokamaks.

Um tipo de instabilidade perigosa para plasmas de fusão é a instabilidade de dobra ("kink"). Se o vaso toroidal tem condutividade infinita o chamado critério de Kruskal-Shafranov indica a ausência de instabilidade de dobra se $q(r) > 1$ na coluna de plasma, como vimos no Capítulo V. Como o perfil do fator de segurança é monotônico e tem um valor mínimo no eixo magnético, resulta que é suficiente escolhermos $q(0) = 1$ para satisfazer a este critério. Aliás, esse é o motivo da quantidade $q(r)$ ser chamada de "fator de segurança" para a coluna de plasma. De (7.114) temos que essa condição implica em $\nu = q(a) - 1$ para o expoente do perfil da densidade de corrente.

7.8 Correção toroidal para o campo magnético e densidade de corrente

Uma vez determinada a função $\Delta(r)$, para $0 \leq r \leq a$, (7.74) nos dá a função de fluxo até primeira ordem de perturbação

$$\Psi(r,\theta) = \Psi_0(r) - \Delta(r)\frac{d\Psi_0}{dr}\cos\theta. \tag{7.115}$$

Usando (7.78)-(7.80) as componentes do campo magnético em coordenadas pseudo-toroidais serão:

$$B_r = -\frac{1}{r(R_0 + r\cos\theta)}\frac{\partial\Psi}{\partial\theta} \tag{7.116}$$

$$B_\theta = \frac{1}{R_0 + r\cos\theta}\frac{\partial\Psi}{\partial r} \tag{7.117}$$

$$B_\phi = -\frac{\mu_0}{R_0 + r\cos\theta} I(\Psi). \tag{7.118}$$

Já as componentes da densidade de corrente podem ser obtidas diretamente a partir de **B** via lei de Ampère. Usando (A.80) temos

$$J_r = \frac{1}{\mu_0 r}\frac{1}{R_0 + r\cos\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left[(R_0 + r\cos\theta)B_\varphi\right], \tag{7.119}$$

$$J_\theta = -\frac{1}{\mu_0}\frac{1}{R_0 + r\cos\theta}\frac{\partial}{\partial r}\left[(R_0 + r\cos\theta)B_\varphi\right] \tag{7.120}$$

$$J_\varphi = \frac{1}{\mu_0 r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(RB_\theta) - \frac{\partial B_r}{\partial\theta}\right] \tag{7.121}$$

Em ordem zero (aproximação cilíndrica) temos que

$$B_{r0} = 0, \qquad B_{\theta 0} = \frac{1}{R_0}\frac{\partial \Psi_0}{\partial r}, \qquad B_{\varphi 0} = -\frac{\mu_0}{R_0} I(\Psi_0) \tag{7.122}$$

$$J_{r0} = 0, \qquad J_{\theta 0} = -\frac{1}{\mu_0}\frac{dB_{\varphi 0}}{dr}, \qquad J_{\varphi} = \frac{1}{\mu_0 r}\frac{d}{dr}(rB_{\theta 0}). \tag{7.123}$$

Em primeira ordem estas componentes ficam:

$$B_r(r,\theta) = -\frac{1}{r}\Delta(r) B_{\theta 0}(r)\sin\theta, \tag{7.124}$$

$$B_\theta(r,\theta) = \left[\left(\frac{d\Delta}{dr} + \frac{r}{R_0}\right) B_{\theta 0}(r) - \Delta \frac{dB_{\theta 0}}{dr}\right]\cos\theta \tag{7.125}$$

$$B_\varphi(r,\theta) = -\frac{dB_{\varphi 0}}{dr}\Delta(r)\sin\theta - \frac{r}{R_0} B_{\varphi 0}\cos\theta. \tag{7.126}$$

Na borda do plasma ($r = a$), usando (7.93) e a condição $\Delta(a) = 0$, o campo poloidal (7.125) se escreve:

$$B_\theta(a,\theta) = B_{\theta 0}(a)\left(1 + \frac{a}{R_0}\Lambda\cos\theta\right). \tag{7.127}$$

7.9 Solução de vácuo

Num tokamak a fronteira do plasma é determinada por um limitador material (como um anel de grafite) que fixa o raio do plasma em $r = a$. A câmara toroidal, por sua vez, tem um raio $r = b > a$, de modo que há uma região $a < r < b$ onde não há essencialmente plasma de modo que o campo nela é de vácuo. Como veremos na sequência, a existência dessa região de vácuo resulta num deslocamento adicional das superfícies magnéticas (em relação ao deslocamento de Shafranov). Este deslocamento adicional pode resultar numa perda de plasma, de modo que um campo vertical de equilíbrio é aplicado (usando bobinas suplementares) de modo a produzir uma força radial para dentro da câmara, que contrabalance este efeito adicional no deslocamento.

O campo de vácuo na região $a < r < b$ pode ser obtido a partir da equação de Grad-Shafranov em coordenadas pseudo-toroidais (**??**), onde fazemos o segundo membro igual a zero

$$\frac{\partial^2\Psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\Psi}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial\Psi}{\partial\theta^2} - \underline{\frac{1}{R_0 + r\cos\theta}\left(\cos\theta\frac{\partial\Psi}{\partial r} - \frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial\Psi}{\partial\theta}\right)} = 0. \tag{7.128}$$

No caso de grande razão de aspecto ($r \ll R_0$) podemos desprezar o termo sublinhado e fazer o seguinte *ansatz* para a solução:

$$\Psi_v(r,\theta) = f(r)\cos\theta. \tag{7.129}$$

Substituindo (7.129) nos termos não-sublinhados em (7.128) concluimos que $f(r) \sim r^{\pm 1}$, tal que a sua solução seja a combinação linear de ambas:

$$\Psi_v(r,\theta) = \left(a_1 r + \frac{a_2}{r}\right)\cos\theta, \tag{7.130}$$

onde a_1 e a_2 são constantes de integração.

A contribuição mais importante ao campo de vácuo é naturalmente aquela gerada pela própria corrente de plasma. No Capítulo anterior (onde usamos coordenadas cilíndricas-II) vimos que a função de fluxo correspondente a uma uma espira de raio $R' = R_0$ e cujo centro está situado na posição $Z' = 0$, conduzindo uma corrente de plasma I_p, é [cf. Eq. (6.144)]:

$$\Psi_p(R,Z) = RA_\phi(R,Z) = \frac{\mu_0 I_p}{\pi k}\sqrt{RR_0}\left[\left(1-\frac{k^2}{2}\right)\mathsf{K}(k) - \mathsf{E}(k)\right], \tag{7.131}$$

onde, de (6.141) e das relações $R = R_0 + r\cos\theta$ e $Z = r\sin\theta$ temos que

$$k^2 = \frac{4RR_0}{(R+R_0)^2 + Z^2} = \frac{1+\frac{r}{R_0}\cos\theta}{1+\frac{r}{R_0}\cos\theta + \frac{r^2}{4R_0^2}}, \tag{7.132}$$

e $\mathsf{K}(k)$ e $\mathsf{E}(k)$ são as integrais elípticas completas de primeira e segunda espécies.

Na aproximação de grande razão de aspecto ($r \ll R_0$) podemos expandir (7.132), obtendo

$$k \approx 1 - \frac{1}{8}\frac{r^2}{R_0^2}, \qquad k' = \sqrt{1-k^2} \approx \frac{1}{2}\frac{r}{R_0}, \tag{7.133}$$

de maneira a podermos empregar as expansões para as integrais elípticas [?]:

$$\mathsf{K}(k) \approx \ln\left(\frac{4}{k'}\right) + \frac{1}{4}\left[\ln\left(\frac{4}{k'}\right) - 1\right]k'^2 + \dots, \tag{7.134}$$

$$\mathsf{E}(k) \approx 1 + \frac{1}{2}\left[\ln\left(\frac{4}{k'}\right) - \frac{1}{2}\right]k'^2 + \dots. \tag{7.135}$$

Após um tedioso cálculo, desprezando os termos de ordem r^2/R_0^2 ou superiores, obtemos

$$\Psi_p(r,\theta) = \frac{\mu_0 I_p R_0}{\pi}\left\{\frac{1}{2}\left[\ln\left(\frac{8R_0}{r}\right) - 2\right] + \frac{r}{4R_0}\left[\ln\left(\frac{8R_0}{r}\right) - 2\right]\cos\theta\right\}. \tag{7.136}$$

Combinando (7.130) e (7.136) temos a função de fluxo para os campos de vácuo:

$$\begin{aligned}\Psi(r,\theta) &= \Psi_v(r,\theta) + \Psi_p(r,\theta) \\ &= \frac{\mu_0 I_p R_0}{2\pi}\left[\ln\left(\frac{8R_0}{r}\right) - 2\right] \\ &+ \frac{\mu_0 I_p}{4\pi}\left\{r\left[\ln\left(\frac{8R_0}{r}\right) - 1\right] + \frac{c_1}{r} + c_2 r\right\}\cos\theta\end{aligned} \tag{7.137}$$

onde as constantes de integração foram redefinidas como

$$c_1 = \frac{4\pi a_2}{\mu_0 I_p}, \qquad c_2 = \frac{4\pi a_1}{\mu_0 I_p} - 1. \tag{7.138}$$

Substituindo (7.137) em (7.79) obtemos, para o campo poloidal de vácuo:

$$B_\theta(r,\theta) = -\frac{\mu_0 I_p}{2\pi r} + \frac{\mu_0 I_p}{4\pi R_0}\left[\ln\left(\frac{8R_0}{r}\right) - \frac{c_1}{r^2} + c_2\right]\cos\theta. \tag{7.139}$$

Calculando este último na borda do plasma ($r = a$) e comparando com a expressão de Shafranov temos a seguinte relação a ser obedecida pelas constantes de integração:

$$\ln\left(\frac{8R_0}{r}\right) + 2\Lambda = \frac{c_1}{a^2} - c_2. \tag{7.140}$$

Analogamente, inserindo (7.137) em (7.78) calculamos o campo radial de vácuo:

$$B_r(r,\theta) = \frac{\mu_0 I_p}{4\pi R_0 r} + \left\{ r\left[\ln\left(\frac{8R_0}{r}\right) - 1\right] + \frac{c_1}{r} + c_2 r \right\} \sin\theta. \tag{7.141}$$

Impondo que este campo seja nulo em $r = a$ temos uma nova relação

$$\frac{c_1}{a} + c_2 a = -a\left[\ln\left(\frac{8R_0}{r}\right) - 1\right]. \tag{7.142}$$

Resolvendo o sistema formado por (7.140) e (7.142) obtemos:

$$c_1 = a^2\left(\Lambda + \frac{1}{2}\right), \tag{7.143}$$

$$c_2 = -\left[\ln\left(\frac{8R_0}{r}\right) - \Lambda - \frac{1}{2}\right], \tag{7.144}$$

os quais, quando substituidos em (7.137), nos fornecem a função de fluxo de Shafranov:

$$\begin{aligned}\Psi(r,\theta) = {} & \frac{\mu_0 I_p R_0}{2\pi}\left[\ln\left(\frac{8R_0}{r}\right) - 2\right] \\ & - \frac{\mu_0 I_p}{4\pi} r \left[\ln\left(\frac{r}{a}\right) + \left(\Lambda + \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right)\right]\cos\theta.\end{aligned} \tag{7.145}$$

7.10 Campo vertical de equilíbrio

A partir da função de fluxo de Shafranov podemos determinar o campo vertical de equilíbrio necessário para compensar o deslocamento horizontal da coluna de plasma. Para tal temos que considerar o comportamento dos termos de (7.145) quando r é muito grande (nesse caso, superior mesmo ao raio do vaso toroidal, ou seja, eventualmente fora do tokamak). O fator $\ln(8R_0/r) - 1$ em (7.145) é uma aproximação, válida para $r \ll R_0$, para a função

$$\left(1 - \frac{k^2}{2}\right)\mathsf{K}(k) - \mathsf{E}(k),$$

que tende a zero quando $r \to \infty$ em (7.131), pois $\mathsf{K}(0) = \mathsf{E}(0) = \pi/2$. A mesma coisa ocorre com o termo c_1/r, de modo que, quando r é muito grande, o único termo sobrevivente na função de fluxo de Shafranov é aquele proporcional a $r\cos\theta$:

$$\Psi_v \approx \frac{\mu_0 I_p}{4\pi} c_2 r \cos\theta, \qquad (r \gg R_0)$$

o qual corresponde a um potencial vetor

$$\mathbf{A}_v = -\frac{1}{R_0 + r\cos\theta}\Psi(r,\theta)\,\hat{\mathbf{e}}_\varphi.$$

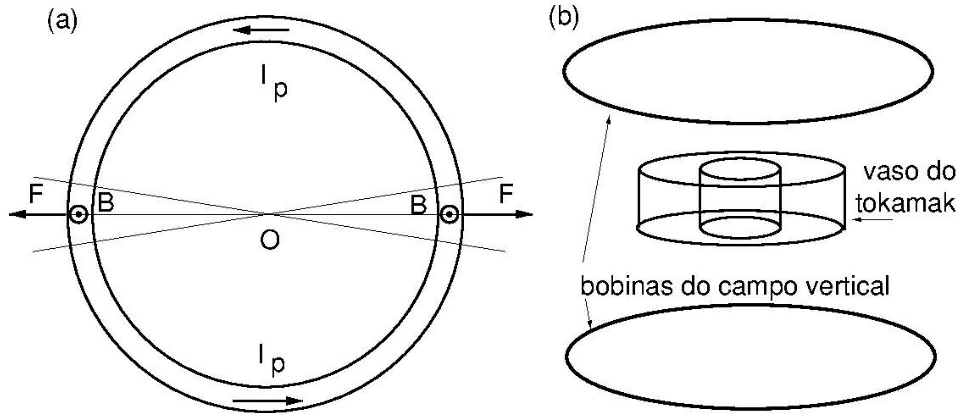

Figura 7.10: (a) Forças de expansão radial da coluna toroidal de plasma; (b) Bobinas de campo vertical para um tokamak.

O campo vertical de equilíbrio é tal que $\mathbf{B}_v = \nabla \times \mathbf{A}_v$. Tirando o rotacional da expressão acima temos que

$$B_v = \frac{\mu_0 I_p c_2}{4\pi R_0}. \tag{7.146}$$

Substituindo (7.144) obtemos, finalmente,

$$B_v = -\frac{\mu_0 I_p}{4\pi R_0}\left[\ln\left(\frac{8R_0}{r}\right) + \Lambda - \frac{1}{2}\right]. \tag{7.147}$$

Este campo vertical é necessário para manter o plasma em equilíbrio, pois seu efeito é produzir uma força magnética que contrabalance a força expansiva causada pela própria corrente de plasma toroidal. Conforme mostra a Fig. 7.10(a) o anel de corrente tem segmentos diametralmente opostos que se repelem, o que provoca uma força resultante expansiva ("hoop force"). Num tokamak o campo vertical é gerado por bobinas do tipo Helmholtz paralelas ao plano $Z = 0$ [Fig. 7.10(b)]. Um sistema computacional ajusta o valor da corrente nas bobinas do campo vertical na medida em que a coluna de plasma se desloca de forma indesejável na direção horizontal, de modo a evitar a colisão da coluna de plasma com outros elementos construtivos da máquina.

Capítulo 8

MHD dissipativa

Neste capítulo faremos uma incursão pelo domínio dos fenômenos MHD dissipativos, nos quais há duas processos dissipativos fundamentais: (i) a viscosidade, que provoca perda de energia devido ao atrito interno no interior do fluido, e que é provocada pela existência de gradientes de velocidade; (ii) a condução térmica provocada pela existência de gradientes de temperatura. Em ambos os casos, vamos dar uma descrição fenomenológica que corresponde a termos adicionais nas equações MHD, mas é possível obter tais termos de forma rigorosa pelo uso da teoria cinética dos gases e da termodinâmica de processos irreversíveis, como em [17].

8.1 Conjunto reduzido de equações MHD

As equações da MHD não-ideal (resistiva) foram obtidas da teoria de um fluido, com o auxílio de uma série de aproximações (por exemplo, restringimo-nos a fenômenos de baixas frequências, plasmas sem viscosidade, comportamento isotrópico, processos adiabáticos, etc.):

- Equação da continuidade

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0, \tag{8.1}$$

- Equação de movimento

$$\rho \left[\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} \right] = -\nabla p + \mathbf{J} \times \mathbf{B}, \tag{8.2}$$

- Equação adiabática ($\gamma = 5/3$)

$$\frac{d}{dt}\left(p\rho^{-\gamma}\right) = 0 \tag{8.3}$$

- Lei de Faraday

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \tag{8.4}$$

- Lei de Ampère

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}, \tag{8.5}$$

- Lei de Ohm generalizada

$$\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B} = \eta \mathbf{J}. \tag{8.6}$$

Tomando o rotacional de (8.6) e usando (8.4) obtemos

$$-\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) = \frac{\eta}{\mu_0} \nabla \times (\nabla \times \mathbf{B}). \tag{8.7}$$

A lei de Gauss magnética $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ não é considerada propriamente uma equação da MHD, mas sim uma restrição aos campos magnéticos que são admissíveis dentro da teoria. Ela nos indica que

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{B}) = -\nabla^2 \mathbf{B} \tag{8.8}$$

o que nos leva à chamada equação de difusão magnética

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) + \frac{\eta}{\mu_0} \nabla^2 \mathbf{B} \tag{8.9}$$

sobre a qual falaremos mais à frente.

Substituindo (8.5) em (8.2) resulta

$$\rho \left[\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right] = -\nabla p + \frac{1}{\mu_0} (\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B}. \tag{8.10}$$

Usando a identidade vetorial

$$\nabla \left(\frac{B^2}{2} \right) = \mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{B}) + (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{B}, \tag{8.11}$$

reescrevemos (8.10) como

$$\rho \left[\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right] = \frac{1}{\mu_0} (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{B} - \nabla \left(p + \frac{B^2}{2\mu_0} \right), \tag{8.12}$$

de forma que eliminamos o campo elétrico e a densidade de corrente das equações MHD.

8.2 Tensor tensão viscosa

Como a densidade dos plasmas é algumas ordens de grandeza abaixo da densidade do ar, usualmente a viscosidade de um plasma é desprezada. No entanto, a magnetohidrodinâmica também pode tratar o movimento de um fluido condutor de eletricidade e sujeito a um campo magnético. Nesta categoria temos desde metais líquidos, como o mercúrio e o sódio, até o magma terrestre. Para todos estes materiais a viscosidade é um efeito extremamente importante.

Em plasmas vimos que, no caso adiabático, o tensor tensão é frequentemente isotrópico

$$\mathsf{T} = -p\mathsf{I}, \tag{8.13}$$

onde p é a pressão e I é o tensor identidade. Podemos adaptar essa expressão para incluir um termo T' que represente o efeito das forças de viscosidade sobre o movimento do fluido:

$$\mathsf{T} = -p\mathsf{I} + \mathsf{T}'. \tag{8.14}$$

O tensor tensão viscosa T' depende linearmente das derivadas espaciais da velocidade do fluido, e deve anular-se identicamente para um fluido em rotação uniforme.

O tensor de segunda ordem mais geral que satisfaz estas duas condições tem componentes [15]

$$T'_{ik} = a\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i}\right) + b\,\frac{\partial v_\ell}{\partial x_\ell}\delta_{ik}, \tag{8.15}$$

onde a e b são coeficientes independentes da velocidade e

$$\nabla\cdot\mathbf{v} = \frac{\partial v_\ell}{\partial x_\ell}.$$

Usualmente nós preferimos trabalhar com as seguintes quantidades: μ (coeficiente de viscosidade de cizalhamento) e ζ (coeficiente de viscosidade volumétrica), definidos de modo que

$$T'_{ik} = \mu\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} - \frac{2}{3}\delta_{ik}\frac{\partial v_\ell}{\partial x_\ell}\right) + \zeta\frac{\partial v_\ell}{\partial x_\ell}\delta_{ik}. \tag{8.16}$$

O termo entre parênteses na expressão acima é denominado "deviante" do tensor tensão

$$W_{ik} = \frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} - \frac{2}{3}\delta_{ik}\frac{\partial v_\ell}{\partial x_\ell}, \tag{8.17}$$

cujo traço é nulo, como pode ser verificado diretamente. Substituindo em (8.14) temos

$$\mathsf{T}' = \mu\mathsf{W} + \zeta(\nabla\cdot\mathbf{v})\,\mathsf{I}. \tag{8.18}$$

Se o escoamento for incompressível, então vimos no Cap. II que subsiste a condição (2.128)

$$\nabla\cdot\mathbf{v} = 0. \tag{8.19}$$

Nestas condições o termo da viscosidade volumétrica desaparece. Além disso, é comum utilizarmos o coeficiente de viscosidade cinemática, definido como

$$\nu = \frac{\mu}{\rho}. \tag{8.20}$$

Para o mercúrio, por exemplo, $\nu = 0,114\times 10^{-6} m^2/s$.

O divergente do tensor (8.14) é

$$\nabla\cdot\mathsf{T} = -\nabla p + \nabla\cdot\mathsf{T}', \tag{8.21}$$

onde a contribuição do termo de tensão viscosa é

$$\begin{aligned}\nabla\cdot\mathsf{T}' &= \mu\nabla\cdot\mathsf{W} + \zeta\nabla(\nabla\cdot\mathbf{v}) \\ &= \mu\nabla^2\mathbf{v} + \left(\zeta + \frac{1}{3}\mu\right)\nabla(\nabla\cdot\mathbf{v}).\end{aligned} \tag{8.22}$$

Substituindo (8.22) em (8.12) temos a equação de movimento para a MHD viscosa no caso geral

$$\begin{gathered}\rho\left[\tfrac{\partial\mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}\cdot\nabla)\,\mathbf{v}\right] = -\nabla p + \\ \sigma\nabla^2\mathbf{v} + \left(\zeta + \tfrac{1}{3}\mu\right)\nabla(\nabla\cdot\mathbf{v}) + \mathbf{J}\times\mathbf{B} - \rho\nabla\Phi.\end{gathered} \tag{8.23}$$

Na ausência de forças magnéticas essa expressão reduz-se à equação de Navier-Stokes da hidrodinâmica. Para fluidos incompressíveis a condição (8.19) e a definição (8.20) permitem-nos escrever a equação de movimento da MHD viscosa numa forma mais simples:

$$\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}\cdot\nabla)\,\mathbf{v} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \nu\nabla^2\mathbf{v} + \frac{1}{\rho}\mathbf{J}\times\mathbf{B} - \nabla\Phi. \tag{8.24}$$

8.3 Equações da MHD dissipativa

No conjunto de equações da MHD não-ideal, visto no Capítulo III, admitimos que continue sendo válida, na presença de outros efeitos dissipativos, a equação da continuidade (2.177)

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0, \tag{8.25}$$

bem como a equação de difusão magnética (8.26)

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) + \frac{\eta}{\mu_0} \nabla^2 \mathbf{B}, \tag{8.26}$$

que combina a lei de Faraday e a lei de Ohm generalizada. Obviamente o termo que contém a resistividade η do plasma já representa um efeito dissipativo.

Incluindo, agora, o efeito da viscosidade, visto na seção anterior, usamos a equação de movimento (8.24)

$$\rho \left[\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right] = -\nabla p - \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{B}) + \mathcal{F} \tag{8.27}$$

onde usamos a Lei de Ampère (8.5) para eliminar a densidade de corrente, em favor do campo magnético, e definimos

$$\mathcal{F} = \sigma \nabla^2 \mathbf{v} + \left(\zeta + \frac{1}{3} \mu \right) \nabla (\nabla \cdot \mathbf{v}) + \mathbf{J} \times \mathbf{B} - \rho \nabla \Phi. \tag{8.28}$$

que representa fisicamente as forças externas que atuam sobre uma unidade de volume de plasma, o que inclui os efeitos gravitacionais e da viscosidade.

Na presença de resistividade, já no Capítulo 2 argumentamos da necessidade de se corrigir a equação da energia. De modo geral, quando incluimos os efeitos dissipativos na teoria MHD temos também que levar em conta as perdas de energia interna do fluido devido às trocas irreversíveis de calor. Os processos dissipativos mais importantes envolvidos em problemas magnetohidrodinâmicos são [16]:

- condução térmica: o fluxo de calor $\mathbf{q}$ é dado pela lei de Fourier

  $$\mathbf{q} = -\kappa \nabla T, \tag{8.29}$$

  onde κ é a condutividade térmica e T a temperatura do fluido;

- resistividade: devemos usar a lei de Ohm generalizada

  $$\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B} = \eta \mathbf{J}. \tag{8.30}$$

  com resistividade η finita;

- radiação térmica: a potência irradiada por unidade de área (ou radiância total) $\mathcal{R}$ é dada pela lei de Stefan-Boltzmann:

  $$\mathcal{R} = \sigma_B T^4, \tag{8.31}$$

  onde $\sigma_B = 5,670 \times 10^{-8} W/m^2.K^4$ é a constante de Stefan-Boltzmann.

Há, ainda, a possibilidade de outras fontes de aquecimento do plasma. Por exemplo, em plasmas de fusão é comum a aplicação de ondas e mesmo de feixes partículas, como métodos auxiliares de injeção de corrente.

Recordamos que, no caso adiabático (sem perdas de energia), tínhamos, de (**??**), a condição

$$\frac{\rho^\gamma}{\gamma-1}\frac{d}{dt}\left(p\rho^{-\gamma}\right)=0. \tag{8.32}$$

Para incluir fenomenologicamente os termos dissipativos, adicionamos ao segundo membro da expressão acima a potência total dissipada Q, a qual inclui os vários mecanismos mencionados para a perda de energia:

$$\frac{\rho^\gamma}{\gamma-1}\frac{d}{dt}\left(p\rho^{-\gamma}\right)=Q=Q_c+Q_r+Q_i+Q_h, \tag{8.33}$$

onde a potência dissipada pela condução térmica é, de (8.29)

$$Q_c=-\nabla\cdot\mathbf{q}=\kappa\nabla^2 T, \tag{8.34}$$

a potência dissipada pelo efeito Joule (conversão irreversível de energia eletromagnética em calor), de (6.69):

$$Q_r=\mathbf{J}\cdot\mathbf{E}=\frac{1}{\eta}\left(E^2+\mathbf{v}\times\mathbf{E}\cdot\mathbf{B}\right), \tag{8.35}$$

e a potência irradiada, de (8.31):

$$Q_i=-\rho^2 A\mathcal{R}=-\rho^2 A\sigma_B T^4. \tag{8.36}$$

Finalmente, o termo Q_h representa a potência associada a outras fontes de aquecimento do plasma.

8.3.1 Efeitos anisotrópicos

Quando um forte campo magnético está presente num plasma, o movimento das suas partículas têm características bastante distintas nas direções paralela e perpendicular ao campo. Como estudamos no Cap. 1, na direção paralela ao campo temos basicamente a giração, ou seja, o movimento do centro de guia. Para $\mathbf{B}$ intenso o raio de Larmor $r_s \sim B^{-1}$ [cf. (1.68)] será relativamente pequeno, de modo que na direção perpendicular ao campo o movimento predominante será a deriva $\mathbf{E}\times\mathbf{B}$.

De (1.82), a velocidade desta deriva é a mesma para elétrons e íons do plasma. Assim a energia cinética média será diferente ao longo das direções paralela e perpendicular do plasma. Esta distinção nos permite supor que a pressão possa ser anisotrópica, ou seja, tenha valores diferentes ao longo das direções paralela e perpendicular ao campo magnético, denotados por $p_\parallel$ e $p_\perp$, respectivamente, conforme Chew, Goldberger e Low (CGL) [69].

Na teoria de Chew-Goldberger-Low os elementos não-diagonais do tensor tensão são nulos, como no caso isotrópico, mas os elementos diagonais são diferentes. Supondo que o campo magnético esteja ao longo da direção z: $\mathbf{B}=B\hat{\mathbf{z}}$, as direções perpendiculares serão x e y, de modo que o tensor tensão será

$$(T_{ij})=\begin{pmatrix} p_\perp & 0 & 0 \\ 0 & p_\perp & 0 \\ 0 & 0 & p_\parallel \end{pmatrix}, \tag{8.37}$$

ou, simbolicamente,

$$\mathsf{T} = p_\perp \mathsf{I} + (p_\parallel - p_\perp)\frac{\mathbf{BB}}{B^2} = p_\perp \mathsf{I} + (p_\parallel - p_\perp)\mathbf{bb}, \tag{8.38}$$

onde $\mathbf{b} = \mathbf{B}/B$ é um vetor unitário na direção do campo magnético e $\mathbf{bb}$ é o seu respectivo produto diádico.

O divergente do tensor tensão será, neste caso,

$$\nabla \cdot \mathsf{T} = \nabla p_\perp + (\mathbf{B}\cdot\nabla)\left[\left(\frac{p_\parallel - p_\perp}{B^2}\right)\mathbf{B}\right], \tag{8.39}$$

onde usamos a condição $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$. Substituindo na equação de movimento (8.12) teremos (sem o termo gravitacional)

$$\rho\left[\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}\cdot\nabla)\,\mathbf{v}\right] = -\nabla p_\perp - (\mathbf{B}\cdot\nabla)\left[\left(\frac{p_\parallel - p_\perp}{B^2}\right)\mathbf{B}\right] + \mathbf{J}\times\mathbf{B}. \tag{8.40}$$

Usando a identidade vetorial (2.187) e a lei de Ampère obtemos para a força de Lorentz a expressão

$$\mathbf{J}\times\mathbf{B} = -\nabla\left(\frac{B^2}{2\mu_0}\right) + (\mathbf{B}\cdot\nabla)\frac{\mathbf{B}}{\mu_0} \tag{8.41}$$

que, ao ser inserida em (8.42) leva a

$$\rho\left[\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}\cdot\nabla)\,\mathbf{v}\right] = -\nabla\left(p_\perp + \frac{B^2}{2\mu_0}\right) + (\mathbf{B}\cdot\nabla)\left[\frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \frac{p_\parallel - p_\perp}{B^2}\mathbf{B}\right]. \tag{8.42}$$

É importante salientar que a anisotropia de pressões não é um efeito dissipativo, estando ainda no escopo da MHD ideal. No entanto, a equação da energia (**??**) não é mais válida, tendo de ser substituida pelas chamadas equações duplo-adiabáticas. Maiores detalhes podem ser vistos na Referência .

Outro efeito anisotrópico importante refere-se ao fluxo de calor devido à condução térmica. Nestes casos, é conveniente separar o termo (8.34) em duas partes, referentes às direções paralela e perpendicular ao campo magnético

$$\nabla\cdot\mathbf{q} = \nabla_\parallel\cdot(\kappa_\parallel \nabla_\parallel T) + \nabla_\perp\cdot(\kappa_\perp\nabla_\perp T), \tag{8.43}$$

onde $\nabla_\parallel$ e $\nabla_\perp$ são gradientes calculados ao longo das direções paralela e perpendicular ao campo magnético, respectivamente.

A condução térmica ao longo das linhas de campo magnético é efetuada principalmente por elétrons, enquanto na direção perpendicular a elas, a condução é devida aos íons positivos. As seguintes relações para as condutividades térmicas paralela e perpendicular ao campo são

$$\kappa_\parallel = 10^{-11} T^{5/2} W/m.K, \qquad (TemK), \tag{8.44}$$

$$\frac{\kappa_\perp}{\kappa_\parallel} = 2\times 10^{-31}\frac{n^2}{T^3 B^2}, \qquad (nemm^{-3}, BemT). \tag{8.45}$$

Concluimos, portanto, que para plasmas fortemente magnetizados (B alto), a condução térmica é efetivamente apenas ao longo das linhas de campo magnético. Esta é uma suposição que tem sido aplicada com frequência para justificar o uso de equações isotérmicas para processos que envolvem o movimento ao longo das linhas de campo, como a rotação toroidal de plasmas em Tokamaks.

8.4 Difusão magnética

Inicialmente, por simplicidade, vamos desconsiderar os efeitos tanto da viscosidade como da condução térmica, retendo apenas o termo relativo à resistividade do plasma. Partimos da equação de difusão magnética

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) + \frac{\eta}{\mu_0}\nabla^2 \mathbf{B}, \tag{8.46}$$

Definindo o coeficiente de difusão magnética

$$D_m \equiv \frac{\eta}{\mu_0}, \tag{8.47}$$

ela é reescrita como

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} - D_m \nabla^2 \mathbf{B} = \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}). \tag{8.48}$$

Para um fluido em repouso ($\mathbf{v} = \mathbf{0}$) ela reduz-se à equação clássica de difusão (ou do calor)

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} - D_m \nabla^2 \mathbf{B} = 0. \tag{8.49}$$

Assim como a concentração de uma substância que se difunde num meio diminui com o tempo, também podemos associar a equação (8.49) a um decaimento do campo magnético com o passar do tempo. Para estimar o tempo característico de decaimento t_m vamos considerar um comprimento característico L do sistema. Analisando das dimensões dos termos em (8.49) obtemos

$$t_m = \frac{L^2}{D_m} = \frac{\mu_0 L^2}{\eta}, \tag{8.50}$$

mostrando que o tempo de decaimento pode ser bastante grande para um bom condutor.

Num plasma de fusão, por exemplo, $L \sim 1m$ e a resistividade é da ordem de $\eta \sim 10^{-8}\Omega.m$, de modo que $D_m \sim 8 \times 10^{-3} m^2/s$ e portanto $t_m \sim 120s$ [21]. Já no núcleo Terrestre, composto basicamente de Fe e outros metais no estado líquido devido à alta temperatura, para o qual $\eta \sim 10^{-7}\Omega.m$. Neste caso $D_m \sim 0,08 m^2/s$ e, para um comprimento da ordem de $L \sim 10^4 km$ o tempo de decaimento será $t_m \sim 10^{15} s \sim 10^7 anos$. Como a idade da Terra (da ordem de 10^9 anos) é muito maior que este tempo, se não houvesse um mecanismo regenerador do campo magnético Terrestre, este já não mais existiria. De fato, este mecanismo regenerador é chamado dínamo magnético, e a MHD é bastante empregada em seu estudo.

Vamos, agora, considerar o movimento do fluido. Na equação de difusão magnética (8.48) há o termo adicional $\nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B})$ devido à velocidade, chamado termo de advecção. A razão entre os termos difusivo $D_m \nabla^2 \mathbf{B}$ e de advecção é denominada número de Reynolds magnético

$$R_m = \frac{|\nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B})|}{|D_m \nabla^2 \mathbf{B}|} \sim \frac{\mu_0 V L}{\eta} \tag{8.51}$$

onde V é uma velocidade característica do movimento.

Para o Hg, que é um metal líquido, $\eta \sim 10^{-6}\Omega.m$. Supondo um escoamento para o qual $L \sim 10cm$ e $V = 10cm/s$, o número de Reynolds magnético é $R_m \sim 0,01 \ll 1$, ou seja, o termo de difusão é bem mais importante que o de advecção. Já para o caso do núcleo Terrestre, onde o Fe líquido tem movimentos convectivos da ordem de $V \sim 10cm/s$, o número de Reynolds magnético, $R_m \sim 10^6 \gg 1$, é tão grande que o termo de difusão é irrelevante frente ao de advecção, e podemos desprezá-lo. Em plasmas de fusão, porém, como $V \sim 100m/s$, o número de Reynolds é da ordem de $R_m \sim 10$ e, portanto, devemos reter ambos os termos na descrição MHD [21].

Como um exemplo de solução da equação de difusão (8.49) vamos considerar um campo magnético unidimensional, porém dependente do tempo, na forma $\mathbf{B} = B(x,t)\mathbf{e}_y$, satisfazendo pois

$$\frac{\partial B}{\partial t} = D_M \frac{\partial^2 B}{\partial x^2}, \tag{8.52}$$

onde o seu valor inicial é dado por

$$B(x,0) = \begin{cases} B_0, \text{se} x > 0, \\ -B_0, \text{se} x < 0. \end{cases} \tag{8.53}$$

e adotamos as seguintes condições de contorno (no infinito)

$$B(x \to \pm\infty, t) = \pm B_0. \tag{8.54}$$

A solução, neste caso, é

$$B(x,t) = B_0 \text{erf}\,(\xi) = \frac{2B_0}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\xi} e^{-u^2} du, \tag{8.55}$$

onde

$$\xi = \frac{x}{\sqrt{4D_M t}} \tag{8.56}$$

Na Figura **??**(a) mostramos a evolução temporal do perfil do campo magnético, que exibe uma difusão progressiva que suaviza o degrau existente em $x = 0$. Da lei de Ampére, a densidade de corrente é dada por

$$\mathbf{J} = \frac{1}{\mu_0} \nabla \times \mathbf{B} = \frac{\partial B}{\partial x}\mathbf{e}_z = \frac{\partial B}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x}\mathbf{e}_z \tag{8.57}$$

Usando (8.55) e (8.56) obtemos

$$J_z = \frac{2B_0}{\mu_0} \frac{1}{\sqrt{4D_M t}} \exp\left(-\frac{x^2}{4D_M t}\right), \tag{8.58}$$

cuja evolução temporal está mostrada na Fig. **??**(b). Para um tempo t fixo, podemos determinar a largura da curva de Gauss correspondente como

$$\Delta x = 2x_m = 4\sqrt{D_M t}, \tag{8.59}$$

onde x_m é a distância x para a qual a densidade de corrente cai a $1/e$ do seu valor máximo. Nós interpretamos Δx como a espessura de uma camada onde a corrente é apreciável (current sheet).

Devido à condição de contorno adotada, o campo magnético a grandes distâncias permanece constante no tempo. Assim, as linhas de campo magnético na camada de corrente não estão movendo-se para longe, mas sim difundindo-se até sua aniquilação. De fato, a difusão é um processo dissipativo, de forma que a energia magnética é convertida em calor por dissipação ôhmica (efeito Joule). As camadas de corrente são muito comuns em plasmas astrofísicos, como na Heliosfera e na Corona solar. Nesta última, elas são responsáveis pelos chamados "capacetes", que são estruturas cônicas que podem ser observadas em eclipses totais do Sol [vide a Fig. 1.12 do Cap. 1].

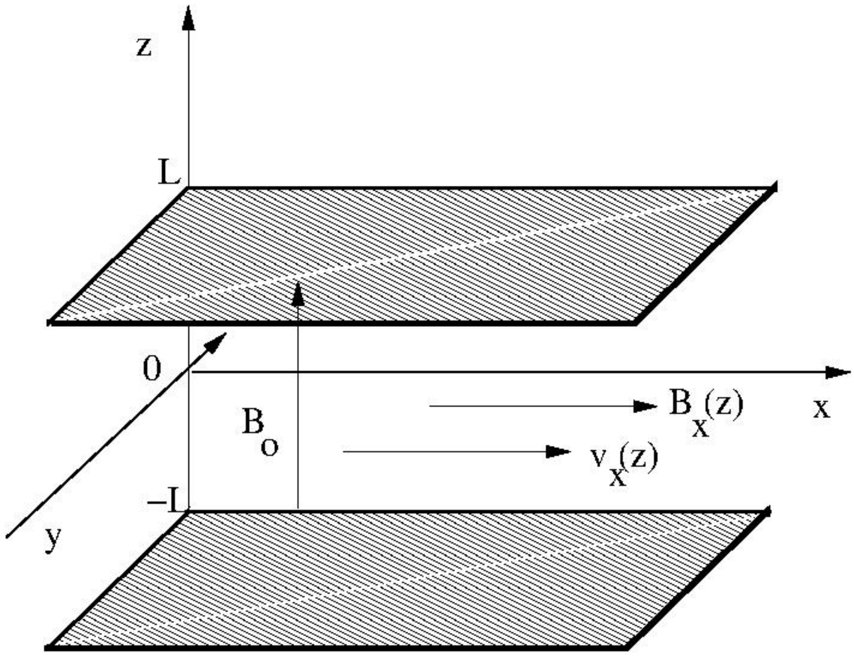

Figura 8.1: Figura esquemática para um escoamento de Hartmann entre placas planas paralelas.

8.5 Escoamentos de Hartmann

Nas aplicações da MHD para plasmas de fusão nós usuamente desprezamos o efeito da viscosidade, uma vez que tratamos de gases ionizados a baixas pressões. No entanto, quando aplicamos a MHD para estudar o escoamento de fluidos condutores, como mercúrio ou metais fundidos, os efeitos da viscosidade são importantes. Um exemplo de interesse tecnológico consiste na refrigeração de reatores a fissão nuclear por meio de Sódio líquido que circula em trocadores de calor dispostos em volta do reator.

Um caso que permite um tratamento analítico completo (escoamento de Hartmann) consiste num escoamento laminar de um fluido condutor entre duas placas paralelas de comprimento ℓ em repouso nas posições $z = \pm L$ e com uma diferença de pressão $p_1 - p_2$ entre as extremidades abertas. Se as placas são muito extensas (em comparação com sua separação, $L \ll \ell$) podemos desprezar efeitos de borda e considerar apenas a componente x da velocidade do fluido $\mathbf{v} = v(z)\hat{\mathbf{e}}_x$.

Aplica-se um campo magnético externo e uniforme $\mathbf{B}_{ext} = B_0\hat{\mathbf{e}}_z$ na direção perpendicular à placas. Por outro lado, como o fluido próximo ao plano mediador ($z = 0$) move-se mais rápido que o fluido próximo às placas, devido à viscosidade do fluido o movimento do fluido tende a empurrar as linhas de campo magnético na direção do movimento, de modo que este adquire também uma componente paralela ao movimento na direção x:

$$\mathbf{B} = B_x(z)\,\hat{\mathbf{e}}_x + B_0\,\hat{\mathbf{e}}_z, \tag{8.60}$$

bem como um campo elétrico uniforme na direção y: $\mathbf{E} = E\hat{\mathbf{e}}_y$. Admitindo isotropia na condutividade haverá uma densidade de corrente na mesma direção: $\mathbf{J} = J\hat{\mathbf{e}}_y$.

Considerando o fluido como sendo incompressível ($\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$) e ignorando as forças gravitacionais a equação de movimento será dada por (8.24):

$$\rho\left[\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}+(\mathbf{v}\cdot\nabla)\,\mathbf{v}\right]=-\nabla p+\mu\nabla^2\mathbf{v}+\mathbf{J}\times\mathbf{B}. \tag{8.61}$$

Num escoamento estacionário a velocidade do fluido é constante no tempo ($\partial\mathbf{v}/\partial t = 0$). Além disso, se a velocidade não for muito alta, podemos desprezar o termo não-linear (de segunda ordem) $(\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{v}$, de modo que o lado esquerdo da equação acima é igual a zero. Separando em componentes cartesianas:

$$-\frac{\partial p}{\partial x}+\mu\frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2}+JB_0 = 0 \tag{8.62}$$

$$-\frac{\partial p}{\partial y} = 0 \tag{8.63}$$

$$-\frac{\partial p}{\partial z}-JB_x = 0 \tag{8.64}$$

donde p não depende de y. Da lei de Ohm generalizada (8.6) resulta que

$$E-v_xB_0=\eta J, \tag{8.65}$$

e da lei de Ampère teremos

$$\mu_0 J=\frac{\partial B_x}{\partial z}. \tag{8.66}$$

Substituindo (8.65) em (8.62) teremos

$$\frac{d^2v_x}{dz^2}+\frac{B_0}{\eta\mu}(E-B_0v_x)+\varpi=0 \tag{8.67}$$

onde escrevemos o gradiente de pressão ao longo das placas como

$$\varpi=\frac{\partial p}{\partial x}=\frac{p_1-p_2}{\ell}. \tag{8.68}$$

É útil definimos o número de Hartmann, que é a quantidade adimensional

$$M=\frac{B_0L}{\sqrt{\mu\eta}}. \tag{8.69}$$

de modo que, normalizando a distância entre as placas por $Z=z/L$, a equação de movimento do fluido torna-se

$$\frac{d^2v_x}{dZ^2}-M^2v_x=-\frac{M^2E}{B_0}-\varpi L^2 \tag{8.70}$$

8.5.1 Escoamento de Hartmann-Poiseuille

Supomos que as duas placas estão em repouso, de modo que o escoamento do fluido é causado pelo gradiente de pressão na direção x. Como um fluido viscoso adere às

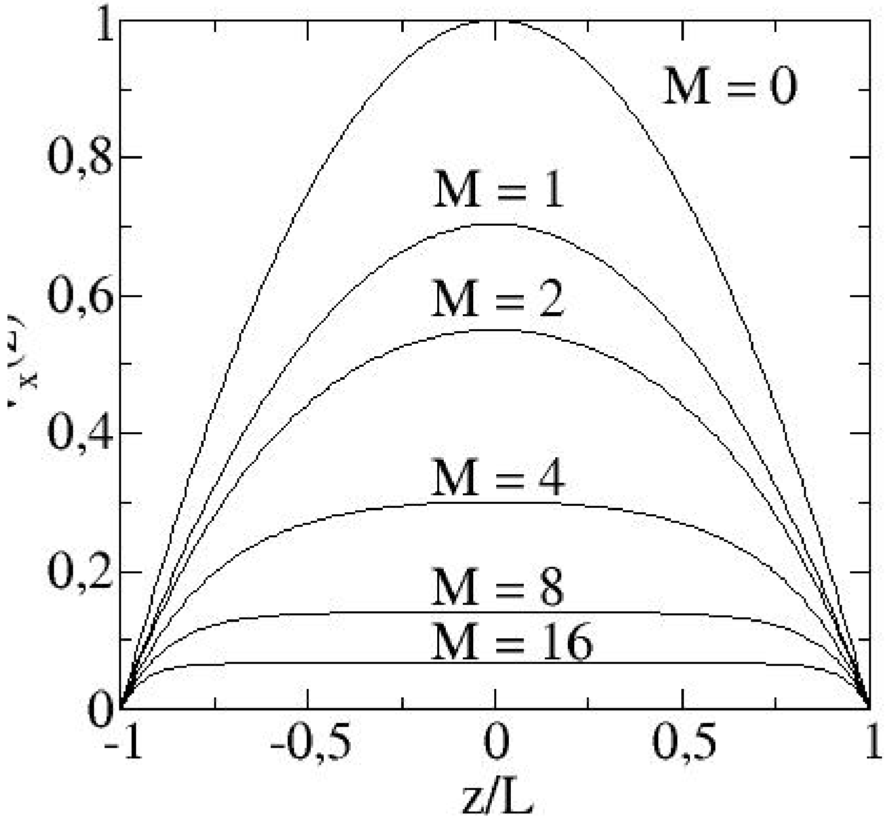

Figura 8.2: Perfis de velocidade no escoamento de Hartmann-Poiseuille para alguns valores do número de Hartmann.

paredes, e estas estão em repouso, impomos como condição de contorno que $v(z = \pm L) = 0$. A solução de (8.70) que satisfaz tal condição é [84]:

$$\begin{aligned} v_x(z) &= \left(\frac{E}{B_0} + \frac{\varpi L^2}{M^2}\right)\left[1 - \frac{\cosh(Mz/L)}{\cosh M}\right] \\ &= v_x(0)\,\frac{\cosh M - \cosh(Mz/L)}{\cosh M - 1}. \end{aligned} \tag{8.71}$$

Vamos considerar dois casos particulares de interesse. Se o campo magnético for muito fraco, o número de Hartmann tende a zero. Usando a expansão em série do cosseno hiperbólico

$$\cosh M = 1 + \frac{M^2}{2!} + \frac{M^4}{4!} + \ldots$$

obtemos

$$v_x(z) = v_x(0)\left(1 - \frac{z^2}{L^2}\right), \tag{8.72}$$

que é o chamado fluxo de Poiseuille de um fluido viscoso entre duas placas paralelas imóveis, devido a um gradiente de pressão, resultando num perfil parabólico de velocidades [Fig. 8.2]. Já se o campo magnético for muito intenso (ou a viscosidade for muito grande), de modo que $M \to \infty$, então (8.71) reduz-se ao perfil

$$v_x(z) = v_x(0)\left\{1 - \exp\left[-M\left(1 - \frac{|z|}{L}\right)\right]\right\}, \tag{8.73}$$

o qual é um perfil quase constante de velocidades, com a exceção de duas camadas-limite muito próximas às paredes, onde a velocidade cai exponencialmente a zero [Fig. 8.2]. No centro do canal ($Z = 0$) a velocidade é

$$v_x(0) \approx \frac{E}{B_0} + \frac{\varpi L^2}{M^2}, \tag{8.74}$$

ou seja, a soma da "velocidade de deriva"E/B_0 (que é a velocidade com a qual as linhas de campo são arrastadas pelo fluido condutor em movimento) com a velocidade $\omega L^2/M^2$ que resulta do equilíbrio entre a força cinética (gradiente de pressão) e a força elétrica induzida pelo arrasto das linhas de campo magnético.

O campo elétrico E dentro do canal na verdade é não-uniforme devido à condição de que a corrente elétrica não pode fluir através das paredes. Para representar de forma mais fiel possível o campo elétrico E uniforme usado em nossa dedução é ajustado de tal modo que a corrente elétrica total fluindo através do canal seja nula:

$$I = \int_S J_y da = 0 \tag{8.75}$$

Isolando J de (8.65) e substituindo na condição acima resulta, por integração, na seguinte relação

$$\left(\varpi + \frac{B_0 E}{\mu\eta}\right)\tanh M = \varpi M. \tag{8.76}$$

que, substituida no perfil de velocidade (8.71) permite-nos escrever

$$v_x(z) = \frac{\mu\eta\varpi M}{B_0^2}\,\frac{\cosh M - \cosh Mz/L}{\sinh M}, \tag{8.77}$$

com a qual o valor médio da velocidade no interior do canal é dado por

$$V = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} dz v_x(z) = \frac{\mu\eta\varpi}{B_0^2}\left(M\coth M - 1\right). \tag{8.78}$$

A equação que nos permite obter o campo magnético "arrastado" pelo movimento do fluido, é encontrada combinando (8.65) e (8.66):

$$\frac{\partial B_x}{\partial z} = \frac{\mu_0}{\eta}\left(E - B_0 v_x(z)\right). \tag{8.79}$$

Neste caso, temos de impor condições de contorno adequadas nas paredes, que supomos condutoras. Do eletromagnetismo sabemos que, na interface entre o meio material e o condutor, a componente tangencial da intensidade magnética $\mathbf{H}$ é contínua, caso não haja corrente superficial fluindo na superfície das paredes. Se as paredes são condutores perfeitos, então $\mathbf{H} = 0$ em seu interior, de modo que

$$H_{\|}(z = \pm L) = \mu_0 B_x(z = \pm L) = 0. \tag{8.80}$$

Levando em conta a condição (8.76) usamos o perfil de velocidade na forma (8.77) e, com ela, podemos integrar a expressão (8.79). Empregando a condição de contorno acima, temos que a componente x do campo magnético será

$$B_x(z) = \frac{\mu_0\mu\varpi L}{B_0}\left(\frac{\sinh(Mz/L)}{\sinh M} - \frac{z}{L}\right), \tag{8.81}$$

Usando o número de Reynolds magnético (8.82)

$$R_m = \frac{\mu_0 V L}{\eta}, \tag{8.82}$$

onde a velocidade característica é dada por (8.78), podemos reescrever a expressão (8.81) como

$$B_x(z) = B_0 R_m \frac{\sinh(Mz/L) - \sinh M(z/L)}{M\cosh M - \sinh M}, \tag{8.83}$$

cujo perfil é mostrado na Figura 8.4 para alguns valores do número de Hartmann. Em todos os casos vemos que o campo B_x anula-se na linha $z = 0$ (além, obviamente, das paredes), e tem sinais opostos em relação a ela (reversão de campo). Para M baixo o arrasto das linhas de campo é praticamente nenhum, e este efeito aumenta com M.

Como o campo magnético total é $\mathbf{B} = B_x(z)\hat{\mathbf{e}}_x + B_0\hat{\mathbf{e}}_z$ podemos traçar as linhas de campo magnético nessa configuração. Sabemos que, em cada ponto da linha de campo o vetor $\mathbf{B}$ tem uma direção tangente à curva, ou seja $\mathbf{B} \times \mathbf{d\ell} = \mathbf{0}$ que, em coordenadas cartesianas, é

$$\frac{dx}{B_x} = \frac{dz}{B_z}. \tag{8.84}$$

Usando (8.81) podemos esboçar as linhas de campo que passam pela origem para alguns valores de M. Para M baixo as linhas de campo mal são afetadas, ao passo que com M crescente as linhas são distorcidas. No entanto, observe-se que as linhas de campo sempre interceptam as paredes de forma perpendicular, o que naturalmente decorre da condição de contorno (8.80) para o campo magnético.

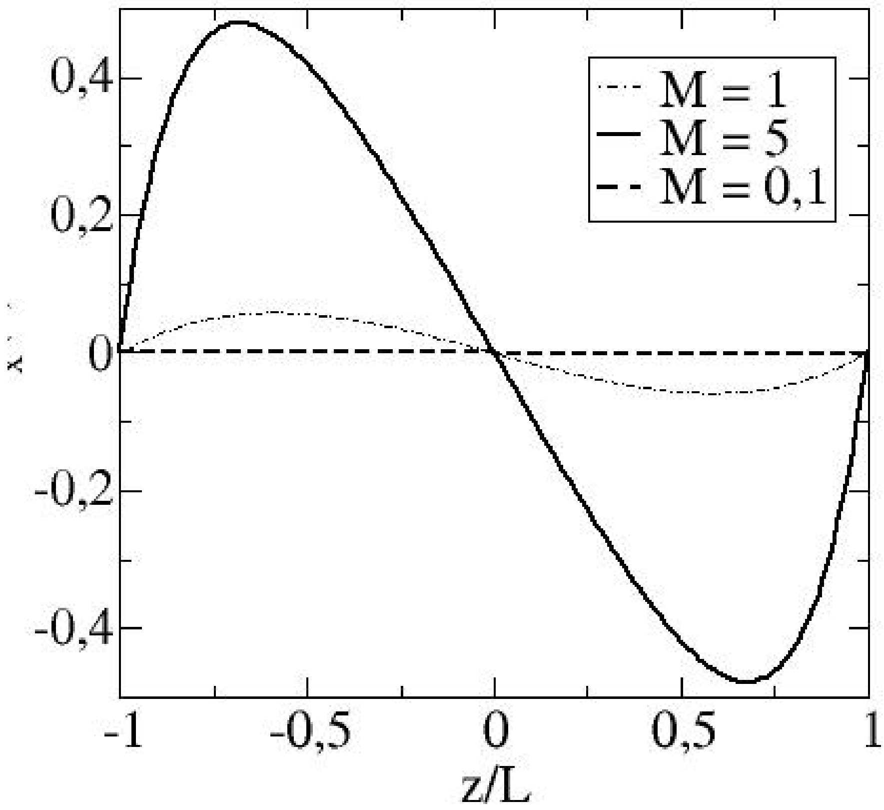

Figura 8.3: Campo magnético arrastado pelo fluido no escoamento de Hartmann-Poiseuille para alguns valores do número de Hartmann.

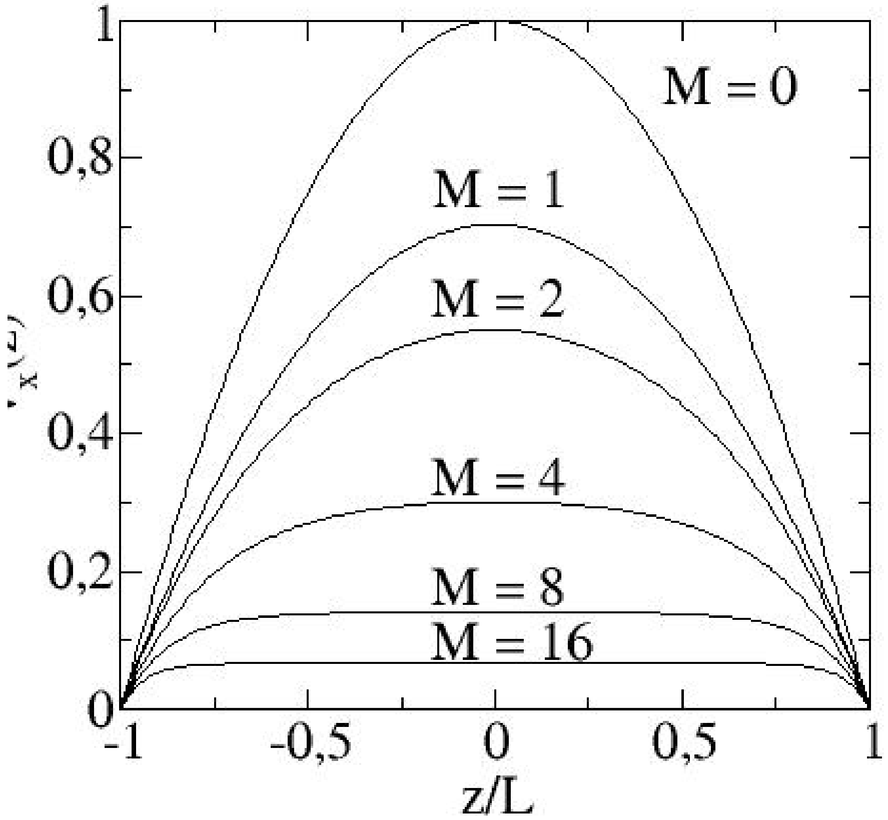

Figura 8.4: Perfis de velocidade no escoamento de Hartmann-Couette para alguns valores do número de Hartmann.

8.5.2 Escoamento de Hartmann-Couette

No escoamento de Hartmann-Couette o movimento do fluido viscoso é determinado pelo movimento das placas (uma vez que o fluido adere a elas). Neste caso podemos ignorar o gradiente de pressão, e fazer $\varpi = 0$ na equação diferencial do movimento (8.70):

$$\frac{d^2 v_x}{dZ^2} - M^2 v_x = -\frac{M^2 E}{B_0} \tag{8.85}$$

Vamos supor que a placa inferior tenha velocidade v_1, e a placa superior v_2, de modo que a condição de contorno é

$$v_x(-1) = v_1, \qquad v_x(1) = v_2. \tag{8.86}$$

A solução de (8.85) que satisfaz esta condição de contorno [20]:

$$v_x(z) = \frac{E}{B_0} + \left(v_2 - \frac{E}{B_0}\right)\frac{\sinh(Mz/L)}{\sinh M} + \left(\frac{v_1+v_2}{2}\frac{E}{B_0}\right)\frac{\sinh[M(1-z/L)]}{\sinh M \cosh M}, \tag{8.87}$$

que mostramos na Figura 8.4 para alguns valores do número de Hartmann. Novamente é instrutivo considerar os casos-limite: (i) se $M \to 0$ obtemos

$$v_x(z) = \left(\frac{v_2 - v_1}{2}\right) z + \left(\frac{v_1 + v_2}{2}\right), \tag{8.88}$$

que é o chamado escoamento de Couette para um fluido viscoso entre duas placas paralelas que se movem.

De forma análoga ao escoamento de Hartmann-Poiseuille visto anteriormente, nós impomos que a corrente elétrica total fluindo através do canal seja nula. Aplicando a condição (8.75) obtemos que

$$\int_{-L}^{L} v_x(z) = \frac{2LE}{B_0}, \tag{8.89}$$

tal que, na subsituição de (8.87), obtemos a condição

$$\frac{v_1 + v_2}{2} = \frac{E}{B_0}, \tag{8.90}$$

ou seja, que a velocidade média do fluido seja igual à “velocidade de deriva”.

O campo magnético “arrastado” pelo movimento do fluido também é dado por (8.79) que, com o auxílio de (8.87) e mais a condição (8.90), resulta em

$$B_x(z) = \frac{\mu_0 B_0 L}{\mu M \sinh M} \left(v_2 - \frac{E}{B_0}\right) \left[\cosh M - \cosh\left(\frac{Mz}{L}\right)\right]. \tag{8.91}$$

Apêndice A

Sistemas de coordenadas

Neste apêndice nós iremos abordar os sistemas de coordenadas curvilíneas, tanto ortogonais como não-ortogonais, que são comumente encontradas em configurações de equilíbrio MHD. Uma descrição mais completa sobre sistemas de coordenadas curvilíneas pode ser encontrada em [87].

A.1 Coordenadas cartesianas (ou retangulares)

1. Coordenadas contravariantes

$$x^1 = x, \qquad x^2 = y, \qquad x^3 = z. \tag{A.1}$$

2. Superfícies coordenadas

   - $x^1 = const.$: planos perpendiculares ao eixo x;
   - $x^2 = const.$: planos perpendiculares ao eixo y;
   - $x^3 = const.$: planos perpendiculares ao eixo z

3. Vetores de base covariantes

$$\hat{\mathbf{e}}_1 = \hat{\mathbf{e}}^1 = \hat{\mathbf{e}}_x \qquad \hat{\mathbf{e}}_2 = \hat{\mathbf{e}}^2 = \hat{\mathbf{e}}_y \qquad \hat{\mathbf{e}}_3 = \hat{\mathbf{e}}^3 = \hat{\mathbf{e}}_z \tag{A.2}$$

4. Tensor métrico covariante:

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad g = \det g_{ij} = 1 \tag{A.3}$$

5. Componentes físicas

$$A_{<1>} = A_x = A^1, \qquad A_{<2>} = A_y = A^2, \qquad A_{<3>} = A_z = A^3, \tag{A.4}$$

6. Vetores de base ortonormais

$$\hat{\mathbf{e}}_{<1>} = \hat{\mathbf{e}}_x, \qquad \hat{\mathbf{e}}_{<2>} = \hat{\mathbf{e}}_y, \qquad \hat{\mathbf{e}}_{<3>} = \hat{\mathbf{e}}_z. \tag{A.5}$$

7. Gradiente
$$\nabla\Phi = \frac{\partial\Phi}{\partial x}\hat{\mathbf{e}}_x + \frac{\partial\Phi}{\partial y}\hat{\mathbf{e}}_y + \frac{\partial\Phi}{\partial z}\hat{\mathbf{e}}_z. \tag{A.6}$$

8. Divergente
$$\nabla\cdot\mathbf{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}. \tag{A.7}$$

9. Laplaciano
$$\nabla^2\Phi = \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}. \tag{A.8}$$

10. Rotacional
$$\nabla\times\mathbf{A} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\hat{\mathbf{e}}_x + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\hat{\mathbf{e}}_y + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\hat{\mathbf{e}}_z \tag{A.9}$$

11. Operador diferencial
$$(\mathbf{A}\cdot\nabla)\mathbf{B} = \left(A_x\frac{\partial B_x}{\partial x} + A_y\frac{\partial B_x}{\partial y} + A_z\frac{\partial B_x}{\partial z}\right)\hat{\mathbf{e}}_x + \left(A_x\frac{\partial B_y}{\partial x} + A_y\frac{\partial B_y}{\partial y} + A_z\frac{\partial B_y}{\partial z}\right)\hat{\mathbf{e}}_y + \left(A_x\frac{\partial B_z}{\partial x} + A_y\frac{\partial B_z}{\partial y} + A_z\frac{\partial B_z}{\partial z}\right)\hat{\mathbf{e}}_z \tag{A.10}$$

A.2 Coordenadas cilíndricas - I

1. Coordenadas contravariantes [1]
$$x^1 = r, \qquad (0 \le r < \infty) \tag{A.11}$$
$$x^2 = \theta, \qquad (0 \le \theta < 2\pi) \tag{A.12}$$
$$x^3 = z, \qquad (-\infty < z < \infty) \tag{A.13}$$

2. Superfícies coordenadas
   - $x^1 = const.$: superfícies cilíndricas coaxiais com o eixo z;
   - $x^2 = const.$: semiplanos contendo o eixo z;
   - $x^3 = const.$: planos perpendiculares ao eixo z;

3. Relação com as coordenadas cartesianas
$$x = r\cos\theta, \tag{A.14}$$
$$y = r\sin\theta, \tag{A.15}$$
$$z = z, \tag{A.16}$$

[1] Neste sistema a coordenada x^3 é z, o que é adequado para descrever equilíbrios com simetria translacional.

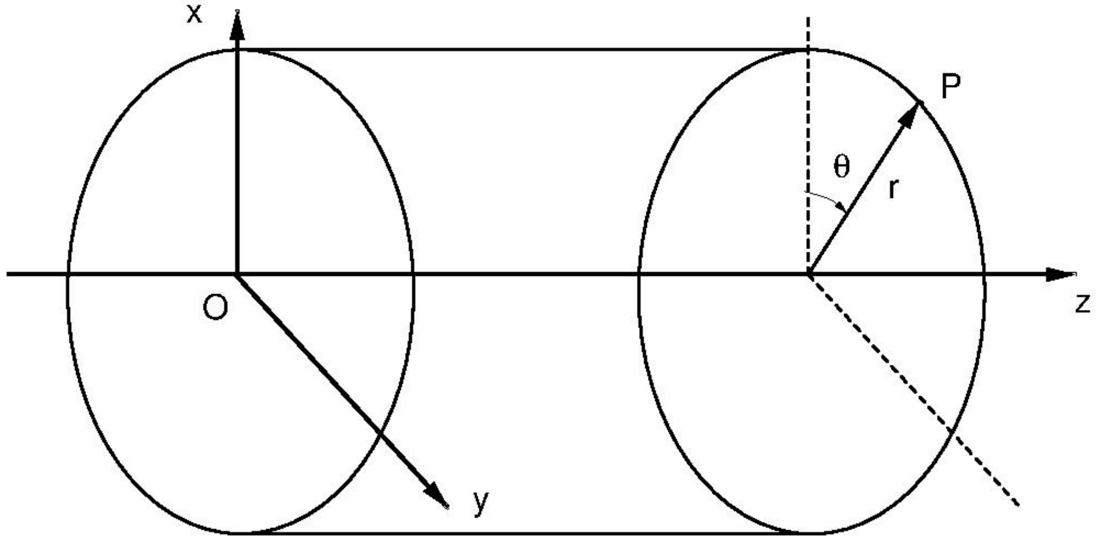

Figura A.1: Coordenadas cilíndricas - I

4. Vetores de base covariantes

$$\hat{\mathbf{e}}_1 = \cos\theta\,\hat{\mathbf{e}}_x + \sin\theta\,\hat{\mathbf{e}}_y \tag{A.17}$$
$$\hat{\mathbf{e}}_2 = -r\sin\theta\,\hat{\mathbf{e}}_x + r\cos\theta\,\hat{\mathbf{e}}_y \tag{A.18}$$
$$\hat{\mathbf{e}}_3 = \hat{\mathbf{e}}_z \tag{A.19}$$

5. Tensor métrico covariante:

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad g = \det g_{ij} = r^2 \tag{A.20}$$

6. Tensor métrico contravariante: $g^{ij} = 1/g_{ij}$

$$(g^{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{r^2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{A.21}$$

7. Componentes físicas

$$A_{<1>} = A_r = A^1 = A_1, \tag{A.22}$$
$$A_{<2>} = A_\theta = rA^2 = \frac{1}{r}A_2, \tag{A.23}$$
$$A_{<3>} = A_z = A^3 = A_3 \tag{A.24}$$

8. Vetores de base ortonormais

$$\hat{\mathbf{e}}_{<1>} = \hat{\mathbf{e}}_r = \hat{\mathbf{e}}_1 \tag{A.25}$$
$$\hat{\mathbf{e}}_{<2>} = \hat{\mathbf{e}}_\theta = \frac{1}{r}\hat{\mathbf{e}}_2, \tag{A.26}$$
$$\hat{\mathbf{e}}_{<3>} = \hat{\mathbf{e}}_z = \hat{\mathbf{e}}_3, \tag{A.27}$$

9. Gradiente
$$\nabla\Phi = \frac{\partial\Phi}{\partial r}\hat{\mathbf{e}}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}\hat{\mathbf{e}}_\theta + \frac{\partial\Phi}{\partial z}\hat{\mathbf{e}}_z. \tag{A.28}$$

10. Divergente
$$\nabla\cdot\mathbf{A} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rA_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial A_\theta}{\partial\theta} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \tag{A.29}$$

11. Laplaciano
$$\nabla^2\Phi = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\theta^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2} \tag{A.30}$$

12. Rotacional
$$\nabla\times\mathbf{A} = \left(\frac{1}{r}\frac{\partial A_z}{\partial\theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z}\right)\hat{\mathbf{e}}_r + \left(\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r}\right)\hat{\mathbf{e}}_\theta + \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(rA_\theta) - \frac{\partial A_r}{\partial\theta}\right]\hat{\mathbf{e}}_z. \tag{A.31}$$

A.3 Coordenadas cilíndricas - II

1. Coordenadas contravariantes [2]
$$x^1 = R, \qquad (0 \le R < \infty) \tag{A.32}$$
$$x^2 = Z, \qquad (-\infty < Z < \infty) \tag{A.33}$$
$$x^3 = \phi, \qquad (0 \le \phi < 2\pi) \tag{A.34}$$

2. Superfícies coordenadas
   - $x^1 = const.$: cilindros coaxiais com o eixo z;
   - $x^2 = const.$: planos perpendiculares ao eixo z;
   - $x^3 = const.$: planos contendo o eixo z;

3. Relação com as coordenadas cartesianas
$$x = R\cos\phi, \tag{A.35}$$
$$y = R\sin\phi, \tag{A.36}$$
$$z = Z, \tag{A.37}$$

4. Vetores de base covariantes
$$\hat{\mathbf{e}}_1 = \cos\phi\,\hat{\mathbf{e}}_x + \sin\phi\,\hat{\mathbf{e}}_y \tag{A.38}$$
$$\hat{\mathbf{e}}_2 = \hat{\mathbf{e}}_z \tag{A.39}$$
$$\hat{\mathbf{e}}_3 = -R\sin\phi\,\hat{\mathbf{e}}_x + R\cos\phi\,\hat{\mathbf{e}}_y \tag{A.40}$$

5. Tensor métrico covariante:
$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & R^2 \end{pmatrix}, \qquad g = R^2 \tag{A.41}$$

[2] Neste sistema a coordenada x^3 é um ângulo, o que é adequado para descrever equilíbrios com simetria rotacional. Haverá, portanto, algumas diferenças (basicamente de sinais) com o sistema anterior.

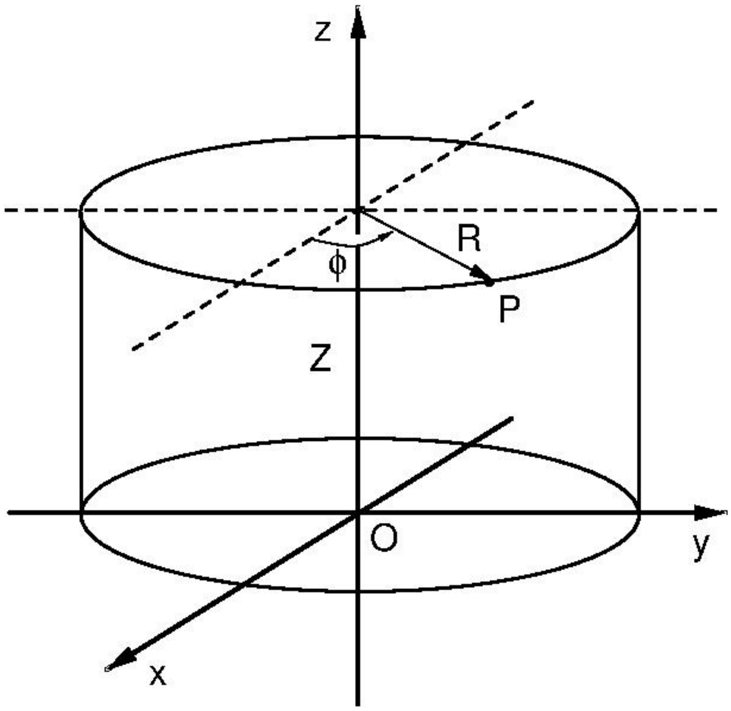

Figura A.2: Coordenadas cilíndricas - II

6. Componentes físicas de um vetor

$$A_{<1>} = A_R = A^1, \tag{A.42}$$
$$A_{<2>} = A_Z = A^2, \tag{A.43}$$
$$A_{<3>} = A_\phi = RA^3, \tag{A.44}$$

7. Vetores de base ortonormais e suas derivadas

$$\hat{\mathbf{e}}_{<1>} = \hat{\mathbf{e}}_R = \hat{\mathbf{e}}_1 \tag{A.45}$$
$$\hat{\mathbf{e}}_{<2>} = \hat{\mathbf{e}}_Z = \hat{\mathbf{e}}_2, \tag{A.46}$$
$$\hat{\mathbf{e}}_{<3>} = \hat{\mathbf{e}}_\phi = \frac{1}{R}\hat{\mathbf{e}}_3, \tag{A.47}$$
$$\frac{\partial \hat{\mathbf{e}}_R}{\partial R} = \frac{\partial \hat{\mathbf{e}}_R}{\partial Z} = 0, \qquad \frac{\partial \hat{\mathbf{e}}_R}{\partial \phi} = \hat{\mathbf{e}}_\phi, \tag{A.48}$$
$$\frac{\partial \hat{\mathbf{e}}_Z}{\partial R} = \frac{\partial \hat{\mathbf{e}}_Z}{\partial Z} = \frac{\partial \hat{\mathbf{e}}_Z}{\partial \phi} = 0, \tag{A.49}$$
$$\frac{\partial \hat{\mathbf{e}}_\phi}{\partial R} = \frac{\partial \hat{\mathbf{e}}_\phi}{\partial Z} = 0, \qquad \frac{\partial \hat{\mathbf{e}}_\phi}{\partial \phi} = -\hat{\mathbf{e}}_R, \tag{A.50}$$

8. Gradiente

$$\nabla\Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial R}\hat{\mathbf{e}}_R + \frac{1}{R}\frac{\partial \Phi}{\partial \phi}\hat{\mathbf{e}}_\phi + \frac{\partial \Phi}{\partial Z}\hat{\mathbf{e}}_Z. \tag{A.51}$$

9. Divergente

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial R}(RA_R) + \frac{\partial A_R}{\partial Z} + \frac{1}{R}\frac{\partial A_\phi}{\partial \phi}. \tag{A.52}$$

10. Laplaciano de uma função escalar

$$\nabla^2\Phi = \frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial R}\left(R\frac{\partial\Phi}{\partial R}\right) + \frac{\partial^2\Phi}{\partial Z^2} + \frac{1}{R^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\phi^2}. \tag{A.53}$$

11. Rotacional

$$\nabla\times\mathbf{A} = \left(\frac{\partial A_\phi}{\partial Z} - \frac{1}{R}\frac{\partial A_Z}{\partial\phi}\right)\hat{\mathbf{e}}_R + \frac{1}{R}\left[\frac{\partial A_R}{\partial\phi} - \frac{\partial}{\partial R}\left(RA_\phi\right)\right]\hat{\mathbf{e}}_Z + \left(\frac{\partial A_Z}{\partial R} - \frac{\partial A_R}{\partial Z}\right)\hat{\mathbf{e}}_\phi \tag{A.54}$$

12. Operador diferencial

$$(\mathbf{A}\cdot\nabla)\mathbf{B} = \left(A_R\frac{\partial B_R}{\partial R} + A_Z\frac{\partial B_R}{\partial Z} + \frac{A_\phi}{R}\frac{\partial B_R}{\partial\phi} - \frac{\partial A_\phi B_\phi}{\partial R}\right)\hat{\mathbf{e}}_R + \left(A_R\frac{\partial B_Z}{\partial R} + A_Z\frac{\partial B_Z}{\partial Z} + \frac{A_\phi}{R}\frac{\partial B_Z}{\partial\phi}\right)\hat{\mathbf{e}}_Z + \left(A_R\frac{\partial B_\phi}{\partial R} + A_Z\frac{\partial B_\phi}{\partial Z} + \frac{A_\phi}{R}\frac{\partial B_\phi}{\partial\phi} + \frac{\partial A_\phi B_R}{\partial R}\right)\hat{\mathbf{e}}_\phi \tag{A.55}$$

13. Laplaciano de uma função vetorial

$$\nabla^2\mathbf{A} = \left(\nabla^2 A_R - \frac{2}{R^2}\frac{\partial A_\phi}{\partial\phi} - \frac{A_R}{R^2}\right)\hat{\mathbf{e}}_R + \nabla^2 A_z\hat{\mathbf{e}}_Z + \left(\nabla^2 A_\phi + \frac{2}{R^2}\frac{\partial A_R}{\partial\phi} - \frac{A_\phi}{R^2}\right)\hat{\mathbf{e}}_\phi \tag{A.56}$$

A.4 Coordenadas pseudo-toroidais (ou locais)

1. Coordenadas contravariantes [3]

$$x^1 = r, \qquad (0 \le r \le R_0) \tag{A.57}$$
$$x^2 = \theta, \qquad (0 \le \theta < 2\pi) \tag{A.58}$$
$$x^3 = \varphi, \qquad (0 \le \varphi < 2\pi) \tag{A.59}$$

2. Superfícies coordenadas

- $x^1 = const.$: toróides coaxiais com o eixo (menor) de raio R_0;
- $x^2 = const.$: trechos de superfícies cônicas limitadas pelo eixo de raio R_0;
- $x^3 = const.$: planos contendo o eixo (maior) Z;

3. Relação com as coordenadas cilíndricas - II e cartesianas

$$R = R_0 + r\cos\theta, \qquad x = (R_0 + r\cos\theta)\cos\varphi \tag{A.60}$$
$$Z = r\sin\theta, \qquad y = (R_0 + r\sin\theta)\sin\varphi \tag{A.61}$$
$$\phi = \varphi, \qquad z = r\sin\theta. \tag{A.62}$$

[3]Quando a razão de aspecto dos toróides é muito grande (aproximação de cilindro periódico) recaímos no sistema de coordenadas cilíndricas - I.

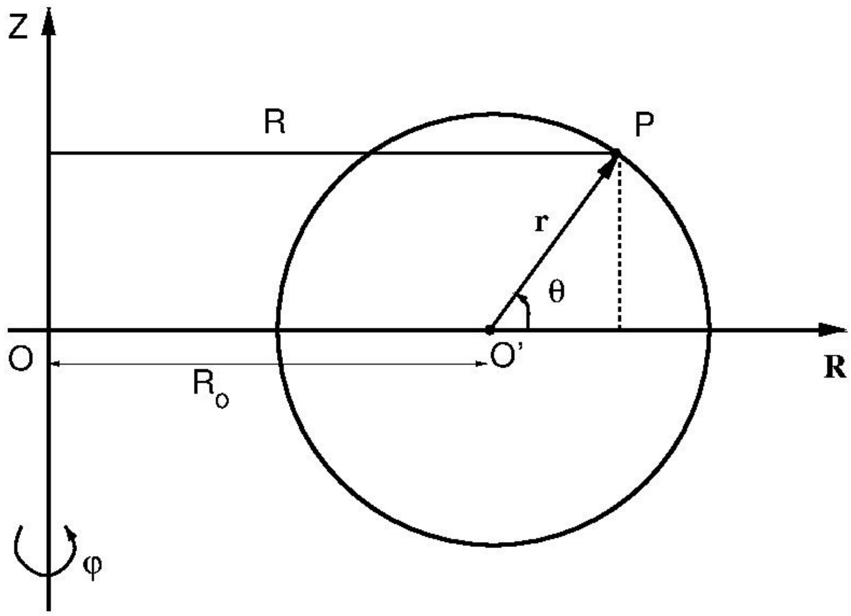

Figura A.3: Coordenadas pseudo-toroidais

4. Vetores de base covariantes

$$\hat{\mathbf{e}}_1 = \cos\theta\cos\varphi\,\hat{\mathbf{e}}_x + \cos\theta\sin\varphi\,\hat{\mathbf{e}}_y + \sin\theta\,\hat{\mathbf{e}}_z \tag{A.63}$$
$$\hat{\mathbf{e}}_2 = -r\sin\theta\cos\varphi\,\hat{\mathbf{e}}_x - r\sin\theta\sin\varphi\,\hat{\mathbf{e}}_y + r\cos\theta\,\hat{\mathbf{e}}_z \tag{A.64}$$
$$\hat{\mathbf{e}}_3 = -(R_0 + r\cos\theta)\sin\varphi\,\hat{\mathbf{e}}_x + (R_0 + r\cos\theta)\cos\varphi\,\hat{\mathbf{e}}_y \tag{A.65}$$

5. Tensor métrico covariante:

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & (R_0 + r\cos\theta)^2 \end{pmatrix} \tag{A.66}$$

$$g = \det g_{ij} = r^2(R_0 + r\cos\theta)^2 \tag{A.67}$$

6. Componentes físicas

$$A_{<1>} = A_r = A^1, \tag{A.68}$$
$$A_{<2>} = A_\theta = rA^2, \tag{A.69}$$
$$A_{<3>} = A_\varphi = (R_0 + r\cos\theta)A^3, \tag{A.70}$$

7. Vetores de base ortonormais

$$\hat{\mathbf{e}}_{<1>} = \hat{\mathbf{e}}_r = \hat{\mathbf{e}}_1 = \hat{\mathbf{e}}^1 \tag{A.71}$$
$$\hat{\mathbf{e}}_{<2>} = \hat{\mathbf{e}}_\theta = \frac{1}{r}\hat{\mathbf{e}}_2 = r\hat{\mathbf{e}}^2 \tag{A.72}$$
$$\hat{\mathbf{e}}_{<3>} = \hat{\mathbf{e}}_\varphi = \frac{1}{R_0 + r\cos\theta}\hat{\mathbf{e}}_3 = (R_0 + r\cos\theta)\,\hat{\mathbf{e}}^3. \tag{A.73}$$

8. Relação com os vetores de base em coordenadas cilíndricas-II

$$\hat{\mathbf{e}}_r = \cos\theta\,\hat{\mathbf{e}}_R + \sin\theta\,\hat{\mathbf{e}}_Z \tag{A.74}$$

$$\hat{\mathbf{e}}_\theta = -\sin\theta\,\hat{\mathbf{e}}_R + \cos\theta\,\hat{\mathbf{e}}_Z \tag{A.75}$$

$$\hat{\mathbf{e}}_\varphi = \hat{\mathbf{e}}_\phi. \tag{A.76}$$

9. Gradiente

$$\nabla\Phi = \frac{\partial\Phi}{\partial r}\hat{\mathbf{e}}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}\hat{\mathbf{e}}_\theta + \frac{1}{R_0 + r\cos\theta}\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi}\hat{\mathbf{e}}_\varphi. \tag{A.77}$$

10. Divergente

$$\nabla\cdot\mathbf{A} = \frac{1}{r(R_0 + r\cos\theta)}\left\{\frac{\partial}{\partial r}\left[r(R_0 + r\cos\theta)A_r\right] + \frac{\partial}{\partial\theta}\left[(R_0 + r\cos\theta)A_\theta\right] + \frac{\partial}{\partial\varphi}\left(rA_\varphi\right)\right\} \tag{A.78}$$

11. Laplaciano

$$\nabla^2\Phi = \frac{1}{r(R_0 + r\cos\theta)}\left\{\frac{\partial}{\partial r}\left[r(R_0 + r\cos\theta)\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right] + \frac{\partial}{\partial\theta}\left[(R_0 + r\cos\theta)\frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}\right] + \frac{\partial}{\partial\varphi}\left[\frac{r}{R_0 + r\cos\theta}\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi}\right]\right\} \tag{A.79}$$

12. Rotacional

$$\nabla\times\mathbf{A} = \frac{1}{r(R_0 + r\cos\theta)}\left\{\left[\frac{\partial}{\partial\theta}\left((R_0 + r\cos\theta)A_\varphi\right) - \frac{\partial(rA_\theta)}{\partial\varphi}\right]\hat{\mathbf{e}}_r + \left[\frac{\partial A_r}{\partial\varphi} - \frac{\partial}{\partial r}\left((R_0 + r\cos\theta)A_\varphi\right)\right]r\,\hat{\mathbf{e}}_\theta + \left[\frac{\partial(rA_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial\theta}\right](R_0 + r\cos\theta)\,\hat{\mathbf{e}}_\varphi\right\} \tag{A.80}$$

Referências Bibliográficas

[1] A. S. Richardson, *2019 NRL Plasma Formulary* (The Office of Naval Research, Washington, 2019). Disponível em urlhttps://www.nrl.navy.mil/ppd/content/nrl-plasma-formulary

[2] F. F. Chen, *Plasma Physics and Controlled Fusion*, 2nd. Ed. (Plenum Press, 1999)

[3] D. R. Nicholson, *Introduction to Plasma Theory* (Wiley, New York, 1999).

[4] T. J. Dolan, *Fusion Research: Principles, Experiments and Technology*, (Pergamon Press, 2000)

[5] W. M. Stacey, *Fusion: An Introduction to the Physics and Technology of Magnetic Confinement Fusion*, 2nd. Ed (Wiley-VCH, Weinheim, 2010)

[6] J. Wesson, *Tokamaks*, 2nd. Ed. (Oxford University Press, 2004)

[7] J. D. Lawson, *Some Criteria for a power producing thermonuclear reactor* (Technical report). Atomic Energy Research Establishment, Harwell, Berkshire, U. K. (December 1955)

[8] H. P. Furth, *Compact tori*, Nucl. Instr. Meth. Phys. Res. **207**,(1983) 93-110

[9] ITER Technical Basis, ITER EDA Documentation Series No. 24, International Atomic Energy Agency, Vienna (2002). Disponível em `https://www.iaea.org/publications/6492/iter-technical-basis`

[10] R. L. Viana, *Física de plasmas: A ciência e as aplicações tecnológicas do quarto estado da matéria*, in Sociedade Brasileira de Física, 50 Anos (1966-2016), 2017, pp. 63-67

[11] G. K. Parks, *Physics of Space Plasmas: An Introduction*, 2nd. Ed. (Westview Press, Boulder, 2004).

[12] W. Baumjohann, R. A. Treumann, *Basic Space Plasma Physics*, (Imperial College Press, London, 1997)

[13] G. Schmidt, *Physics of High Temperature Plasmas*, 2nd. Ed. (Academic Press, New York, 1979).

[14] J. A. Bittencourt, *Fundamentals of Plasma Physics*, 3rd. Ed. (Springer, New York, 2004)

[15] L. Landau, E. Lifshitz, *Fluid Mechanics* (Pergamon Press)

[16] L. Landau, E. Lifshitz, *Electrodynamics of Continuous Media* (Pergamon Press)

[17] G. M. Kremer, *A Equação de Boltzmann e os Processos de Transporte em Gases*, Ed. EDUSP, São Paulo.

[18] M. Zemansky, *Calor e Termodinâmica* (Guanabara Dois, Rio de Janeiro, 1978).

[19] J. P. Freidberg, *Ideal magnetohydrodynamic theory of magnetic fusion systems*, Rev. Mod. Phys. **54** (1982) 801

[20] J. D. Jackson, *Classical Electrodynamics*, 3rd. Ed. (Wiley, New York, 1999)

[21] K. S. Thorne, R. D. Brandford *Modern Classical Physics: Optics, Fluids, Plasmas, Elasticity, Relativity* (Princeton University Press, New Jersey, 2017).

[22] H. Alfvén, *Cosmical electrodynamics* (Clarendon Press, Oxford, 1950).

[23] I. Bronstein, K. Semendiaev, *Manual de Matemática para Engenheiros e Estudantes* (Ed. Mir, Moscou, 1979)

[24] R. Fitzpatrick, *Plasma Physics: An Introduction* (CRC Press, 2014)

[25] W. H. Bennett, *Magnetically self-focusing streams*, Phys. Rev. **45** (1934) 890-897.

[26] R. M. O. Galvão, *Equilíbrio Magnetohidrodinâmico*, in *Física de Plasmas*, Vol. 1, Eds. A. C.-L. Chian e M. F. Reusch (Universidade Federal Fluminense, Niterói, 1979)

[27] J. B. Taylor, *Relaxation of toroidal plasma and generation of reverse magnetic fields*, Phys. Rev. Lett. **33** (1974) 1139-1141

[28] P. M. Bellan, *Magnetic Helicity, Spheromaks, Solar Corona Loops, and Astrophysical Jets*, (World Scientific, Singapore, 2018)

[29] R. M. O. Galvão, *Estabilidade Magnetohidrodinâmica*, in *Física de Plasmas*, Vol. 1, Eds. A. C.-L. Chian e M. F. Reusch (Universidade Federal Fluminense, Niterói, 1979)

[30] H. Tasso, *Lectures in Plasma Physics*, IFUSP Preprint P-181, LFP-08, September 1989.

[31] I. B. Bernstein, E. A. Frieman, M. D. Kruskal, R. M. Kulsrud, *An energy principle for hydromagnetic stability problems*, Proc. R. Soc. Lond. A **244** (1958) 17-40

[32] K. Miyamoto, *Plasma Physics and Controlled Nuclear Fusion* (Springer Verlag, Berlin-Heidelberg, 2005)

[33] W. M. Stacey Jr., *Fusion Plasma Analysis* (Wiley, New York, 1981)

[34] J. P. Freidberg, *Ideal MHD* (Cambridge University Press, Cambridge, 2014)

[35] H. Grad and H. Rubin, *Hydromagnetic equilibria and force-free fields*, in "Proceedings of the Second United Nations International Conference on the Peaceful Uses of Atomic Energy", vol. 31 (United Nations, Geneva, 1958) p. 190

[36] V. D. Shafranov, *On magnetohydrodynamical equilibrium configurations*, Zhurnal Experimentalnoi i Teoreticheskoi Fiziki **33** (1957) 710 [Soviet Physics J.E.T.P. **6** (1958) 545].

[37] R. Lüst e A. Schlüter, *Axialsymmetrische magnetohydrodynamische Gleichgewichtskonfigurationen*, Zeitschrift für Naturforschung **12A** (1957) 850.

[38] S. Jardin, *Computational Methods in Plasma Physics* (CRC Press, Boca Raton, 2010)

[39] L. S. Solovev, Zh. Tekh. Fiz. **53** (1967) 626.

[40] J. Pantuso Sudano, *Equilibrium of a toroidal plasma*, Physics of Fluids **17** (1974) 1915

[41] E. K. Maschke, *Exact solutions of the MHD equilibrium equation for a toroidal plasma*, Plasma Physics **15** (1973) 535-541

[42] F. Herrnegger, Proceedings of the V. European Conference on Controlled Fusion and Plasma Physics, Grenoble, August 1972, Vol. I, p. 26

[43] M. Abramowitz e I. A. Stegun (Eds.) *Handbook of Mathematical Functions* (Dover, New York, 1980)

[44] M. Airola, A. Pironti, *Magnetic Control of Tokamak Plasmas* (Springer-Verlag, London, 2008)

[45] J. W. Edenstrasser, *The only three classes of symmetric MHD equilibria*, J. Plas. Phys. **24** (1980) 515-518

[46] J. W. Edenstrasser, *Unified treatment of symmetric MHD equilibria*, J. Plas. Phys. **24** (1980) 299-313

[47] M. Y. Kucinski and I. L. Caldas, *MHD equilibrium equation in symmetric systems*, arXiv:1103.3663v1 (March 25, 2011).

[48] K. K. Harris, *On a plasma sheath separating regions of oppositely directed magnetic fields*, Nuovo Cimento **23** (1962) 115

[49] L. C. Woods *Theory of Tokamak Transport*

[50] G. K. Morikawa, *Double-toroidal hydromagnetic-equilibrium configurations within a perfectly conducting sphere*, Physics of Fluids **12** (1969) 1648-1651.

[51] H. Lamb, *Hydrodynamics* (Dover Publishing, New York,)

[52] P. M. Estrada,

[53] Wootton

[54] V. D. Shafranov, *Equilibrium of a plasma toroid in a magnetic field*, Soviet Physics JETP **37** (1960) 775-212

[55] M. Y. Kucinski, I. L. Caldas, L. H. A. Monteiro, V. Okano, *Toroidal plasma equilibrium with arbitrary current distribution*, J. Plasma Physics **44** (1990 303-311

[56] M. G. Bell, Nucl. Fusion **19** (1979) 33

[57] S. Suckewer, H. P. Eubank, R. J. Goldston, E. Hinnov, N. R. Sauthoff, Phys. Rev. Lett. **43** (1979) 207

[58] R. K. Linford, W. T. Armstrong, D. A. Platts, E. G. Sherwood, in *Plasma Physics and Controlled Nuclear Fusion Research* (IAEA, Vienna, 1979), Vol. II, p. 447

[59] E. K. Maschke, H. Perrin, *Exact solutions of the stationary MHD equations for a rotating toroidal plasma*, Plasma Physics **22** (1980) 579-594

[60] R. A. Clemente, R. Farengo, Phys. Fluids **27** (1984) 776-778

[61] R. L. Viana, *MHD equilibrium equation with azimuthal rotation in a curvilinear coordinate system*, Int. J. Theoret. Phys. **37** (1998) 2657-2667

[62] R. L. Viana, *Adiabatic plasma rotations in orthogonal coordinate systems*, Braz. J. Phys. **31** (2001) 58

[63] R. L. Viana, R. A. Clemente, S. R. Lopes, *Spherically symmetric stationary MHD equilibria with azimuthal rotation*, Plasma Phys. Control. Fusion **39** (1997) 197

[64] S. T. da Silva, R. L. Viana, Stationary MHD equilibria describing azimuthal rotations in symmetric plasmas, Physics of Plasmas, Vol. 23 (2016) 122503,

[65] S. Kaneko, H. Chiyoda and I. Hirota, *Magnetohydrodynamic equilibrium with prolate spheroidal plasma-vacuum interface*, Journal of the Physical Society of Japan **50** (1981) 359-360

[66] S. Kaneko, H. Chiyoda and I. Hirota, *Magnetohydrodynamic equilibrium with spheroidal plasma-vacuum interface: compact toroid without toroidal magnetic field*, Journal of the Physical Society of Japan **52** (1983) 2016-2024

[67] F. F. De Carvalho, R. L. Viana, I. L. Caldas, *Magnetohydrostatic equilibrium with external gravitational fields in symmetric systems*, Braz. J. Physics **47** (2017) 55-64

[68] Hee J Lee, *Fundamentals of Plasma Physics* (World Scientific, Singapore, 2019)

[69] G. F. Chew, M. L. Goldberger, and F. E. Low, *The Boltzmann equation and the one-fluid hydromagnetic equations in the absence of particle collisions*, Proc. R. Soc. London **236** (1956) 112

[70] C. Mercier, M. Cotsaftis, Nucl. Fusion **1** (1961) 121

[71] H. Grad, Phys. Fluids **10** (1967) 137

[72] A. Sestero, A. Taroni, Nucl. Fusion **16** (1976) 164

[73] P. J. Fielding, F. A. Haas, Nucl. Fusion **19** (1979) 855

[74] W. A. Cooper et al., Nucl. Fusion **20** (1980) 985

[75] W. A. Cooper, Phys. Fluids **26** (1983) 1830

[76] E. R. Salberta et al, Phys. Fluids **30** (1987) 2796

[77] H. M. Rizk, J. Plasma Phys. **38** (1987) 209

[78] H. Grad, in Magneto-Fluid and Plasma Dynamics Symposia in Applied Mathematics, Vol. 18, American Mathematical Society, Providence, RI (1967) 162

[79] E. K. Maschke, Plasma Phys. **15** (1973) 535

[80] F. Hernegger, in Controlled Fusion and Plasma Physics (Proc. 5th Eur. Conf. Grenoble, 1972), Vol. 1, Centre d'Études Nucléaires, Grenoble (1972) 26

[81] R. A. Clemente, *Anisotropic axisymmetric equilibria via an analytic method*, Nucl. Fusion **33** (1993) 963-965

[82] L. C. Souza and R. L. Viana, *Anisotropic MHD equilibria in symmetric systems*, Phys. Plasmas **26** (2019) 042502

[83] V. D. Pustovitiv, *Anisotropic pressure effects on plasma equilibrium in toroidal systems*, Plasma Phys. Contr. Fusion **52** (2010) 065001

[84] T. G. Cowling, *Magnetohydrodynamics* (Adam Hilger, London, 1976).

[85] L. E. Zakharov and V. D. Shafranov, *Evolution of equilibrium of toroidal plasma*, in Plasma Physics [Ed. B. B. Kadomtsev], Ed. Mir, Moscou, 1981

[86] S. P. Hirshman, *Curvilinear coordinates for magnetic confinement geometries* (ORNL/TM-8393, 1982)

[87] P. Moon and D. E. Spencer, *Field Theory Handbook*, 2nd. Ed. (Springer-Verlag, Berlin, 1988)