

ANTONIO MARCOS BATISTA

**MÉMOIRAS, ESPECTRO DE LYAPUNOV E
SINCRONIZAÇÃO DE SISTEMAS ACOPLADOS**

Tese apresentada como requisito parcial à
obtenção do grau de Doutor em Ciências, Curso
de Pós-Graduação em Física, Setor de Ciências
Exatas, Universidade Federal do Paraná.

Orientador: Prof. Dr. Ricardo Luiz Viana

CURITIBA
2001

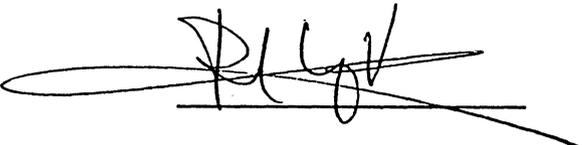
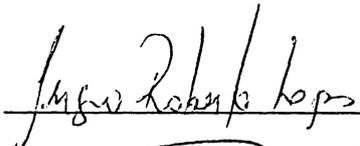
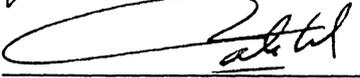
MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO E DO DESPORTO
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
SETOR DE CIÊNCIAS EXATAS
CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

ATA DE DEFESA DE TESE DE DOUTORADO

ANTONIO MARCOS BATISTA

TÍTULO : "MEMÓRIAS, ESPECTRO DE LYAPUNOV E SINCRONIZAÇÃO DE SISTEMAS ACOPLADOS "

Em sessão pública, iniciada às quatorze horas, nesta data, após um Seminário sobre o assunto de sua tese sob o título acima, e posterior arguição por esta Banca Examinadora, esta decidiu atribuir ao candidato conceito global A.

Banca Examinadora	Assinatura	Conceito
PROF. RICARDO LUIZ VIANA (Orientador/Presidente) (Dpto. Física UFPR)		<u>A</u>
PROF. GILBERTO MEDEIROS KREMER (Dpto. Física UFPR)		<u>A</u>
Prof. SÉRGIO ROBERTO LOPES (Dpto. Física UFPR)		<u>A</u>
Prof. PAULO MURILO CASTRO DE OLIVEIRA (Instituto de Física – UFF)		<u>A</u>
Prof. IBERE LUIZ CALDAS (Instituto de Física – USP)		<u>A</u>

Curitiba, 28 de setembro de 2001

À minha esposa Lurdes.

Sinceros agradecimentos:
à minha esposa, aos meus pais, ao
Dr. Ricardo L. Viana, ao Dr. Sérgio
R. Lopes, aos amigos e professores.

Resumo

Este trabalho é dividido em três partes: (i) memórias de curto período em redes de mapas e circuitos acoplados; (ii) espectro de Lyapunov em redes de mapas caóticos acoplados; (iii) sincronização de amplitude e fase em redes regulares e de pequeno mundo. Investigamos memórias de curta duração armazenadas em uma rede de mapas acoplados sujeita a uma perturbação externa periódica. Apresentamos evidências numéricas que mapas fracamente não lineares são capazes de armazenar múltiplas memórias de curta duração, e usamos o fato para codificar símbolos em uma matriz gráfica, usando uma lei de controle. Consideramos também uma rede de circuitos RL acoplados indutivamente. As memórias são definidas em termos da diferença da amplitude da corrente elétrica. Codificamos símbolos Braille em uma matriz usando perturbações externas. Também analisamos uma rede de mapas acoplados para este sistema. Estudamos a transição do acoplamento global para o acoplamento local usando uma rede de mapas logísticos acoplados. A intensidade do acoplamento entre os sítios diminui com a distância na rede com uma lei de potência. Analisamos a mudança nos padrões espaço-temporais, do regime de supressão de caos para caos espaço-temporal, e calculamos a média dos expoentes de Lyapunov positivos (entropia KS) e o máximo expoente de Lyapunov para a rede de mapas acoplados. Consideramos uma rede de mapas lineares por partes acoplados, e usamos uma forma de acoplamento que inclui os casos global (campo médio) e o local (próximos vizinhos) como casos limites. Analisamos a sincronização de amplitude e fase neste sistema dinâmico e investigamos seu comportamento sobre a variação dos parâmetros do sistema. Usamos a média dos expoentes de Lyapunov positivos como um indicador da dinâmica caótica na rede de mapas acoplados, e diagnósticos espaciais para caracterizar o comportamento de sincronização. Estudamos mapas do seno-círculo acoplados usando o modelo de Newman e Watts para interações de mundo pequeno. Investigamos a sincronização de frequência usando como diagnóstico a dispersão do número de rotação.

Abstract

This work has three parts: (i) short-time memories in coupled map lattices; (ii) Lyapunov spectrum of a coupled chaotic map lattice; (iii) amplitude and phase synchronization in regular lattices and of small world. We investigate short-time memories in coupled map lattices with a periodic external input. In the case of linear coupled maps, the transient length necessary to achieve permanent memory is studied. We present numerical evidence that weakly coupled nonlinear maps are able to store multiple short-time memories, and use this fact to encode symbols in a matrix of pixels, using suitable control laws. We consider a lattice of coupled circuits RL in which the coupling is inductive and we investigate memory storage with a external input. The memories are defined in terms of the differences of the amplitudes of the electrical currents. We encode Braille symbols in a matrix of pixels, using this external perturbation. We also analyze a coupled map lattice for the coupled circuits and obtained a control law for memory encoding. We study the transition from the global to the local coupling using a coupled chaotic logistic map lattice. The coupling strength between sites decreases with the lattice distance in a power law fashion making possible to study this transition. We analyze the change in spatio-temporal patterns from suppression of chaos to spatio-temporal chaos, computing the average of positive exponents (KS-entropy) and the maximal Lyapunov exponents for the coupled map lattice. We consider a lattice of coupled piecewise linear maps, and we use a coupling scheme that includes the global (mean-field) and local (nearest-neighbor) prescriptions as limiting cases. We analyze amplitude and phase synchronization in this dynamical system, investigating its behavior under variation of the system parameters. We use the average positive exponents Lyapunov as an indicator of chaotic dynamics of the coupled maps, and use spatial diagnostics for characterizing the emergence of synchronized behavior. We study a sine-circle map lattice using the modified model by Newman and Watts for small-world interactions. We investigate the frequency synchronization and the amplitude synchronization, using as diagnostics the winding number dispersion.

Conteúdo

1	Introdução	8
2	Fenomenologia Espaço Temporal	12
2.1	Conceitos Básicos	15
2.1.1	Dinâmica Local	16
2.1.2	Tipos de Acoplamento	17
2.1.3	Condições Iniciais e de Contorno	20
2.2	Acoplamento local	20
2.2.1	Domínios e <i>kinks</i>	22
2.2.2	Seleção de padrão com supressão de caos	23
2.2.3	Estruturas <i>zigzag</i>	24
2.2.4	Intermitência espaço temporal	25
2.3	Acoplamento global	26
2.4	Acoplamento tipo lei de potência	27
3	Memórias em Rede de Mapas Acoplados	30
4	Memórias em Circuitos RL Acoplados Indutivamente	42

4.1	Modelo a tempo contínuo	42
4.2	Modelo a tempo discreto	48
4.3	Memórias de curto período	49
4.4	Memórias em rede de mapas acoplados	53
4.5	O efeito de ruído	54
5	Espectro de Lyapunov em Redes de Mapas Logísticos Acoplados	57
5.1	Expoentes de Lyapunov para mapas	57
5.2	Espectro de Lyapunov	58
5.3	Espectro de Lyapunov para o acoplamento do tipo potência	64
6	Sincronização e Espectro de Lyapunov de Mapas Lineares por Partes Acoplados em Rede	76
6.1	Espectro de Lyapunov	77
6.2	Sincronização de amplitude	89
6.3	Sincronização de fase	92
7	Redes de Mundo Pequeno	98
7.1	Modelo de redes de Mundo Pequeno	99
7.2	Sincronização	101
8	Conclusões	105

Capítulo 1

Introdução

Muitos sistemas dinâmicos de interesse em ciência e tecnologia têm um grande número de graus de liberdade, como é visto em fenômenos de turbulência, observados em fluidos, ótica, física do estado sólido, química, etc. Para o estudo desses sistemas deve-se usar modelos dinâmicos espacialmente extensos (Kaneko, 1983).

Os sistemas dinâmicos espaço-temporais são classificados levando-se em conta a discretização do espaço, tempo e/ou das variáveis locais de estado. Os principais tipos são:

a) Equações diferenciais parciais: apresentam o espaço, o tempo e a variável local de estado contínuos. Podemos citar a equação complexa de Ginzburg-Landau, usada como modelo para estudos numéricos de caos espaço-temporal (Kaneko, 1993).

b) Cadeias de osciladores acoplados: são caracterizados pelo espaço discreto, enquanto o tempo e a variável de estado local são contínuos. Como exemplos temos redes de pêndulos acoplados e junções Josephson (Wiesenfeld, 1989).

c) Autômato celular: é um sistema no qual o tempo, o espaço e a variável local de estado são discretos. Este sistema foi introduzido por von Neumann e tem recebido bastante atenção (Kaneko, 1989 a). Um dos mais famosos autômatos celulares bidimensionais foi proposto por J. H. Conway, que foi chamado Jogo da Vida (Jackson, 1990).

d) Mapas acoplados na rede: apresentam discretização no espaço e no tempo, enquanto a variável local de estado é contínua. São mais complexos em estrutura do que os autômatos celulares, devido à capacidade de produção de informação local (Crutchfield e Kaneko, 1987). A rede de mapas acoplados foi introduzida por

Kunihiko Kaneko em 1983 (Kaneko, 1983) como um modelo simples com características de caos espaço temporal. Nos últimos anos, o estudo de mapas acoplados expandiu-se nos campos da biologia, matemática e engenharia (Kaneko, 1993). Um acoplamento bastante utilizado é o chamado acoplamento local, que conecta seus dois vizinhos mais próximos (Kaneko, 1983). Outra forma de acoplamento é o acoplamento global, no qual a dinâmica de um mapa é determinada por todos os outros (Kaneko, 1991).

Uma aplicação de mapas acoplados foi sugerida por Coppersmith e colaboradores (Coppersmith, 1997). Eles usaram uma rede de mapas para simular o efeito de memórias que foram observadas em experiências de ondas de densidade de carga, em que sequências de pulsos elétricos periódicos são aplicados em um cristal de $NbSe_3$. Neste trabalho a rede de mapas surge de um modelo de uma cadeia de partículas em um potencial periódico. A observação de memórias em mapas acoplados mostra a possibilidade de modelos para redes neurais, já que o mapa (que tem uma variável de estado contínua) pode armazenar mais informações em cada ponto da rede do que sistemas binários. Nós usamos esta idéia para realizar dois estudos: (i) como os parâmetros do sistema afetam o tempo necessário para que a memória seja armazenada e (ii) quais são os possíveis efeitos de uma não linearidade no sistema.

Para a análise da formação de memórias também usamos outro modelo. O modelo que propomos consiste em uma rede de circuitos RL acoplados indutivamente. Esta rede exhibe memórias quando aplicamos sinais oscilatórios em cada ponto da rede. Definimos apropriadamente uma quantidade (variável de curvatura) para caracterizar os padrões memorizados. Os padrões, depois da partição do domínio da variável de curvatura, são usados para codificar informações. Como exemplo escolhemos o sistema de linguagem Braille para deficientes visuais. O sistema dinâmico é uma rede de equações diferenciais ordinárias, que ao ser discretizado permitiu que pudessemos escrever uma regra para a codificação da informação. Também foi verificada a influência de ruído no sistema.

É possível estudar a transição entre o acoplamento local e o global usando uma prescrição onde a interação entre os mapas diminui com a distância na rede com uma lei de potência. Este acoplamento apresenta como casos particulares o acoplamento local e o global e tem sido proposto em modelos de algumas redes neurais biológicas (Raghavachari e Glazier, 1995). Utilizamos esta rede acoplando mapas logísticos para calcular o espectro de Lyapunov. O espectro de Lyapunov de uma rede de mapas acoplados informa sobre a caoticidade da rede, quando um ou mais expoentes de Lyapunov são positivos. O espectro de Lyapunov de mapas logísticos e lineares por parte com o acoplamento local foi estudado por Kaneko (Kaneko, 1986) e por Isola e colaboradores (Isola, 1990). O espectro de Lyapunov para uma rede de mapas acoplados globalmente foi considerado por Kaneko (Kaneko, 1990). Com o espectro de Lyapunov, para o mapa logístico acoplado com o acoplamento

tipo potência, calculamos o máximo expoente e a média dos expoentes positivos (entropia KS), que são analisados em termos das propriedades do acoplamento e do alcance. Os resultados são comparados com padrões espaço-temporais conhecidos para o acoplamento local e o global. Também usamos um mapa linear por partes e obtivemos relações analíticas para a densidade de entropia KS.

Nos últimos anos apareceram vários trabalhos sobre sincronização em sistemas não lineares acoplados, estudando a sincronização de amplitude, fase ou frequência. Quando o estado de um oscilador não depende somente de suas próprias equações mas também do estado de seus vizinhos, esses osciladores podem sincronizar. Este fato foi primeiramente descrito por Huyghens, que estudou dois pêndulos acoplados. Sistemas de osciladores acoplados aparecem em física e biologia, e podem descrever arranjos de junções Josephson, lasers, ritmos cardíacos e neurais, etc.... Pecora e Carroll (Pecora, 1990) mostraram que dois osciladores caóticos idênticos quando acoplados podem atingir a sincronização de amplitude. O efeito de sincronização de fase em sistemas caóticos foi descrita teoricamente por Pikovsky e colaboradores (Pikovsky, 1997) e Parlitz e colaboradores (Parlitz, 1996) observaram experimentalmente a sincronização de fase em um modelo eletrônico de dois osciladores de Rössler acoplados.

Nós estudamos as propriedades da sincronização de uma rede de mapas lineares por parte, com comportamento caótico, considerando o acoplamento do tipo potência. Obtivemos o espectro de Lyapunov e a entropia KS da rede de mapas e investigamos a relação entre caos espaço-temporal e sincronização de amplitude e fase usando diagnósticos numéricos.

Trabalhos recentes mostram outras formas de acoplamentos. Uma destas formas é a conectividade aleatória não local. Usando esta forma de acoplamento Chaté e Manneville (Chaté, 1992) mostraram que a sincronização de um grande número de osciladores é facilmente alcançada. Esta conectividade que não apresenta uniformidade espacial pode ser usada em redes neurais e circuitos elétricos (Gade, 1996).

Em muitos casos da vida real existem conexões que não são completamente locais e nem completamente aleatórias, mas algo intermediário. Isto foi modelado em um trabalho de Watts e Strogatz (Watts, 1998) como interação de mundo pequeno. Em tais redes temos conexões entre os sítios vizinhos e algumas conexões aleatórias não locais. Temos como exemplos: propagação de informações na internet, rede neural da minhoca *Caenorhabditis elegans*, transmissão de doenças, sincronização, etc.... No modelo de Watts e Strogatz há a possibilidade da rede ser quebrada em agrupamentos de mapas não conectados, por isso usamos o modelo de Newman e Watts (Newman, 1999). Neste modelo não ocorre a quebra das conexões locais para a formação de conexões não locais. Com o modelo de Newman e Watts estudamos a sincronização de frequência considerando mapas do seno-círculo com

diferentes frequências. Nos trabalhos de Viana e Batista (Viana, 1998) e Pinto e Viana (Pinto, 2000) foi verificado que a sincronização de frequência não ocorre para o acoplamento local. Neste trabalho investigamos o comportamento da sincronização de frequência variando a probabilidade das conexões não locais.

A tese está organizada da seguinte forma:

No capítulo 2 mostramos algumas características de mapas acoplados em uma rede unidimensional, bem como as formas de acoplamentos mais encontradas na literatura.

No capítulo 3 estudamos a formação de memórias em uma rede de mapas acoplados que modela partículas conectadas por molas e sujeitas a perturbações periódicas externas. Obtemos uma relação que permite decodificar padrões escolhidos

No capítulo 4 analisamos a formação de memórias em uma rede de circuitos RL acoplados indutivamente. Para esta análise usamos uma rede de equações diferenciais ordinárias e uma rede de mapas acoplados. Encontramos uma relação que permite calcular as perturbações externas que fornecem um padrão desejado, sendo que este padrão é decodificado usando o método Braille.

No capítulo 5 é realizado o estudo do espectro de Lyapunov em uma rede de mapas acoplados utilizando o acoplamento de alcance variável. Este acoplamento permite a transição entre o acoplamento local e o global. Estudamos, com este acoplamento, o comportamento da média dos expoentes de Lyapunov positivos e o maior expoente de Lyapunov.

No capítulo 6 é acoplado o mapa $f(x) = \beta x$ (módulo 1). Com a rede de mapas acoplados estudamos o espectro de Lyapunov e a sincronização usando o acoplamento de alcance variável. Com relação a sincronização, analisamos a sincronização de fase e a sincronização de amplitude.

No capítulo 7 analisamos a sincronização de frequência em mapas do seno-círculo acoplados usando redes de mundo pequeno.

Capítulo 2

Fenomenologia Espaço Temporal

Sistemas dinâmicos espaço-temporais têm um número tipicamente muito grande de graus de liberdade. A extensão do estudo de sistemas com baixa dimensionalidade para incluir graus de liberdade espacialmente distribuídos tem sido uma das áreas mais ativas de pesquisa em Dinâmica Não-linear nos últimos vinte anos. Este interesse é motivado pelo grande número de problemas práticos onde a dinâmica espacial desempenha um papel significativo: turbulência em fluidos e plasmas, ergodicidade na mecânica estatística, sólitons, redes neurais, excitações em sólidos, formação de padrões em sistemas naturais, processamento digital de sinais, computação paralela, dentre outros.

Às vezes é dito, talvez injustamente, que a turbulência é o grande problema não-resolvido da Física Clássica. O fato é que, a despeito do imenso esforço dispendido neste século, ainda parecemos estar longe de uma descrição satisfatória de todos os aspectos da turbulência. Ruelle e Takens, em 1971, sugeriram que a representação de um fluxo turbulento no espaço de fase poderia ser um atrator estranho, ou caótico. No entanto, a dinâmica caótica não nos fornece indicações sobre a estrutura espacial do fluxo. A conexão entre as propriedades de sistemas caóticos de baixa dimensionalidade e a dinâmica espaço-temporal é uma das linhas de pesquisa mais intensa nesta área.

Em Ciências Naturais e Tecnologia dependemos fortemente de modelos matemáticos para descrever os fenômenos observados. No que diz respeito a sistemas dinâmicos espacialmente estendidos, devemos levar em conta que os graus de liberdade espaciais devem ser adicionados aos modelos matemáticos obedecendo a uma simetria espacial. Esta simetria, a invariância translacional, restringe o tipo de acoplamento entre os graus de liberdade do sistema, já que a posição relativa dos graus de liberdade espaciais determina as propriedades do acoplamento (mais ou menos intenso, nesta ou naquela direção, etc.).

Sistemas contínuos apresentam um número infinitamente denso de graus de liberdade espaciais, e são normalmente descritos por equações diferenciais parciais. No entanto, estaremos mais interessados em sistemas que apresentam um número enumerável (e finito) de graus de liberdade espaciais, que denominaremos de *sistemas dinâmicos na rede*. A cada grau de liberdade espacial podemos assinalar uma variável de estado, que caracteriza alguma propriedade física do sistema que varia com o espaço e o tempo.

Na tabela a seguir apresentamos uma hierarquia de sistemas dinâmicos espacialmente estendidos (Crutchfield, 1987). Equações diferenciais parciais têm espaço, tempo e variável de estado contínuas. Equações funcionais iteradas diferem no tratamento do tempo como variável discreta. Cadeias de osciladores representam sistemas dinâmicos na rede onde a variável de estado local é contínua, ou seja, são redes de equações diferenciais ordinárias acopladas. Nosso objeto nesta tese são redes de mapas acoplados, que têm espaço e tempo discretos, mas sendo contínua a variável de estado. É uma categoria acima, ainda, dos autômatos celulares, onde todas as variáveis são discretas.

sistema	espaço	tempo	variável de estado
equações diferenciais parciais	contínuo	contínuo	contínua
equações funcionais iteradas	contínuo	discreto	contínua
cadeias de osciladores	discreto	contínuo	contínua
redes de mapas acoplados	discreto	discreto	contínua
autômatos celulares	discreto	discreto	discreta

Cada uma destas categorias de sistemas têm seus méritos e defeitos, sua utilização é determinada pelo balanço custo-benefício das características que definem o problema a ser resolvido. Por exemplo, poderíamos preferir as equações diferenciais parciais pela suposta “generalidade” que seu tratamento proporciona, mas isto é questionável pois: (a) os métodos numéricos empregados para resolver problemas de valores de contorno acabam sempre por discretizar as variáveis espaciais e temporais; (b) o tempo computacional alto e a recorrente instabilidade numérica são fatores que dificultam a sua investigação.

Sistemas dinâmicos na rede, como mapas ou osciladores, são mais complexos que autômatos celulares pois têm variáveis de estado contínuas, e conseqüentemente a capacidade de gerar informação local. No entanto, há sistemas onde a informação local é naturalmente discreta, mesmo binária, como em determinadas redes neurais, e para elas a descrição mais adequada pode ser a dos autômatos celulares.

Finalmente, redes de mapas acoplados podem ser obtidas como seções de Poincaré (estroboscópicas) de cadeias de osciladores acoplados. Em certos casos,

é possível passar de uma categoria a outra por meio de um processo sistemático de discretização que leva em conta uma periodicidade natural, tanto no espaço como no tempo, sobretudo quando há uma perturbação do tipo função delta de Dirac periódica.

Redes de mapas acoplados foram introduzidas em Dinâmica Não-Linear a partir da tese de doutoramento de Kunihiko Kaneko (Kaneko, 1983), em 1983. Desde então, tem sido dele e seus colaboradores da Universidade de Tóquio as principais contribuições à teoria; embora haja vários outros grupos pesquisando o assunto em outras partes do mundo. Um 1992, a revista americana CHAOS dedicou um fascículo inteiro às redes de mapas acoplados. Em 1993, Kaneko editou o livro "Theory and Applications of Coupled Map Lattices" pela World Scientific (Kaneko, 1993), com contribuições de diversos autores. Ainda hoje, as principais revistas científicas na área de Dinâmica Não-Linear exibem um bom número de artigos neste assunto, que continua oferecendo problemas de interesse aos pesquisadores.

Devido às suas características de fácil implementação computacional, quando comparados a outros sistemas hierarquicamente superiores (vide Tabela), as redes de mapas acoplados têm sido escolhidas com frequência como "laboratórios teóricos" para o estudo da dinâmica espaço-temporal. Respeitadas suas limitações enquanto modelos matemáticos da Natureza, podemos encarar as redes de mapas acoplados como paradigmas extremamente úteis para a investigação de fenômenos não-lineares espacialmente extensos.

A estratégia para modelar fenômenos dinâmicos em sistemas espacialmente extensos por redes de mapas acoplados é baseada nos seguintes passos (Kaneko, 1983):

1. Escolha um conjunto de variáveis de estado macroscópicas numa rede. Num sistema físico-químico, por exemplo, tais variáveis podem ser a temperatura, o campo de velocidade do fluido ou a concentração local de alguma substância. A dimensão e a topologia da rede devem ser escolhidas de acordo com o sistema físico a ser modelado;
2. Decomponha o processo subjacente ao fenômeno em componentes independentes. Por exemplo, para um sistema fluido não-homogêneo e condutor de calor, os processos de convecção, reação, difusão, etc.;
3. Substitua cada componente por uma dinâmica paralela simples na rede. A dinâmica consiste numa transformação não-linear das variáveis de estado em cada sítio da rede e um termo de acoplamento entre vizinhos adequadamente escolhidos;
4. Leve a cabo cada unidade dinâmica, ou processo, sucessivamente.

A maior motivação para o estudo das redes de mapas acoplados tem sido a investigação do caos espaço-temporal, entendido como a dinâmica caótica em sistemas espacialmente extensos, onde o número efetivo de graus de liberdade diverge quando o tamanho do sistema aumenta. O caos espaço-temporal é criado pela dinâmica não-linear local e pela difusão espacial. Nas redes de mapas acoplados estes procedimentos são considerados separadamente.

2.1 Conceitos Básicos

Nós supomos uma rede espacial M -dimensional. Em princípio, trataremos do caso unidimensional ($M = 1$) para definir os conceitos básicos, mas também nos reportaremos a estudos bi- e tri-dimensionais. Já existem alguns trabalhos sobre redes fractais (como um tapete de Sierpinski), nas quais M não é um número inteiro. A cada sítio da rede espacial nós atribuímos uma variável de estado real D -dimensional $\mathbf{x}^{(i)} \in \mathcal{R}^D$, onde $i = 0, 1, 2, \dots, N - 1$ é o índice que identifica o i -ésimo sítio numa rede unidimensional com N sítios. Na maioria dos casos até agora estudados, a variável de estado é unidimensional ($D = 1$), mas já existem alguns estudos para $D = 2$.

O tempo é discretizado na forma usual $n = 0, 1, 2, \dots$, tal que $\mathbf{x}_n^{(i)}$ seja a variável do sítio i no tempo n . A evolução de uma variável de estado local é governada por dois fatores:

1. a dinâmica local é regida por um mapa D -dimensional $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{f}(\mathbf{x})$ que avança discretamente no tempo;
2. o acoplamento a outros sítios por meio de uma certa prescrição;

De forma geral, a equação que define uma rede unidimensional de mapas acoplados é

$$\mathbf{x}_{n+1}^{(i)} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_n^{(i)}) + \mathcal{C}^{(i)}(\mathbf{x}_n^{(j)}) \quad (2.1)$$

onde $\mathcal{C}^{(i)}$ é um termo genérico de acoplamento, que pode depender de todos os sítios $j = 0, 1, 2, \dots, N - 1$, inclusive do próprio sítio i . O vetor N -dimensional $(\mathbf{x}_n^{(0)}, \mathbf{x}_n^{(1)}, \dots, \mathbf{x}_n^{(N-1)})$, que representa o estado da rede no tempo n , é dito o seu *padrão* neste instante.

2.1.1 Dinâmica Local

A dinâmica local tem sido investigada por meio de mapas de baixa dimensionalidade bem conhecidos. O exemplo mais estudado é o do mapa logístico

$$x \mapsto f(x) = rx(1 - x) \quad (2.2)$$

onde $x \in [0, 1]$ e $r \in [1, 4]$ é o parâmetro de controle do mapa. Além deste, merecem destaque os mapas lineares por partes, como os mapas do padeiro $x \rightarrow 2x \pmod{1}$, o mapa da tenda; e o mapa do seno-círculo

$$x \mapsto f(x) = x + \omega + \frac{K}{2\pi} \text{sen}(2\pi x), \quad (2.3)$$

onde $x \in [0, 1]$ é uma variável angular, $0 \leq \omega < 1$ é uma frequência natural, e $K > 0$ mede a não-linearidade do sistema.

Outros mapas unidimensionais serão expostos mais adiante. Quanto a mapas bidimensionais ($D = 2$), as investigações têm-se concentrado no mapa de Hénon

$$x_{n+1} = A - (x_n)^2 + By_n, \quad y_{n+1} = x_n, \quad (2.4)$$

e no mapa padrão de Chirikov-Taylor (redes simpléticas):

$$p_{n+1} = p_n + K \text{sen} \theta_{n+1}, \quad \theta_{n+1} = \theta_n + p_n \pmod{2\pi}, \quad (2.5)$$

Daqui para frente nos limitaremos ao caso onde a variável de estado é unidimensional ($D = 1$).

Quanto ao tipo de dinâmica local, podemos classificar as redes de mapas acoplados como

1. Homogêneas: quando os mapas são idênticos em todos os sítios;
2. Não-homogêneas: quando os mapas não são idênticos devido a mudanças nos seus parâmetros para cada sítio da rede;

Redes homogêneas são mais comuns nos estudos computacionais, porém em alguns casos, como o estudo da sincronização, é conveniente usar redes não-homogêneas com parâmetros aleatoriamente distribuídos num dado intervalo.

2.1.2 Tipos de Acoplamento

Há infinitas formas de acoplamento entre os mapas. Nos acoplamentos *locais*, a dinâmica de um dado sítio i é determinada apenas pelos sítios vizinhos mais próximos: $i + 1$ e $i - 1$. Acoplamentos *não-locais* permitem que o sítio i seja influenciado por um número arbitrariamente grande de outros sítios mais distantes.

Vamos abordar inicialmente o primeiro caso. Um tipo genérico de acoplamento local é dado pelo termo de acoplamento

$$\mathcal{C}_{j=i,i\pm 1}^{(i)}(x_n^{(j)}) = \varepsilon_0 g(x_n^{(i)}) + \varepsilon_R g(x_n^{(i+1)}) + \varepsilon_L g(x_n^{(i-1)}) \quad (2.6)$$

onde o vetor $\vec{\varepsilon} = (\varepsilon_0, \varepsilon_R, \varepsilon_L)$ é chamado o núcleo (*kernel*) de acoplamento. Podemos enumerar quatro casos de interesse:

1. Acoplamento aditivo: $\varepsilon_0 = 0, \varepsilon_R = \varepsilon_L$;
2. Acoplamento Laplaciano, ou difusivo: $-\frac{\varepsilon_0}{2} = \varepsilon_R = \varepsilon_L$;
3. Acoplamento totalístico: $\varepsilon_0 = -\frac{2}{3}, \varepsilon_R = \varepsilon_L = \frac{1}{3}$;
4. Acoplamento unidirecional: $-\varepsilon_0 = \varepsilon_L, \varepsilon_R = 0$;

O acoplamento Laplaciano

$$x_{n+1}^{(i)} = f(x_n^{(i)}) + \frac{\varepsilon}{2}(g(x_n^{(i-1)}) - 2g(x_n^{(i)}) + g(x_n^{(i+1)})) \quad (2.7)$$

é o mais utilizado nos estudos de redes de mapas acoplados. Seu nome decorre do fato que o termo de acoplamento pode ser encarado como a discretização de uma derivada segunda espacial

$$\frac{\partial^2 g(x)}{\partial x^2} \rightarrow \frac{1}{2}(g(x^{(i-1)}) - 2g(x^{(i)}) + g(x^{(i+1)})) \quad (2.8)$$

onde o parâmetro de rede espacial é igual a um: $\Delta x = (i+1) - i = 1$. Tais derivadas ocorrem em termos difusivos de equações de reação-difusão.

As três primeiras escolhas para o núcleo de acoplamento referem-se a sistemas com difusão simétrica, ao passo que o último tipo corresponde a um acoplamento assimétrico. Redes com esta característica têm sido usadas para modelar fluxos abertos (*open flow lattices*).

A função $g(x)$ define a *dinâmica de acoplamento*. Há apenas dois casos de interesse:

1. Acoplamento Linear: $g(x) = x$;
2. Acoplamento Futuro: $g(x) = f(x)$.

sendo que o acoplamento futuro tem como vantagens o fato da variável de estado em cada sítio permanecer dentro do mesmo domínio que teria no mapa isolado, de modo que os mapas acoplados na redes continuam normalizados. Além disso, no acoplamento futuro nós pré-iteramos os sítios vizinhos ($i \pm 1$) antes de acoplá-los ao sítio i . Isto fornece uma melhor aproximação a um mapeamento estroboscópico de uma cadeia análoga de osciladores a tempo contínuo.

A iteração simultânea dos vizinhos é uma aproximação melhor do estado corrente da rede, em relação ao simples uso de seus valores no instante precedente. Por exemplo, um acoplamento Laplaciano futuro é dado por

$$\begin{aligned} x_{n+1}^{(i)} &= f(x_n^{(i)}) + \frac{\varepsilon}{2}(f(x_n^{(i-1)}) - 2f(x_n^{(i)}) + f(x_n^{(i+1)})) \\ &= (1 - \varepsilon)f(x_n^{(i)}) + \frac{\varepsilon}{2}(f(x_n^{(i-1)}) + f(x_n^{(i+1)})). \end{aligned} \quad (2.9)$$

No entanto, poderíamos permutar os processos, primeiro acoplando os valores dos vizinhos e depois aplicando a função do mapa ao resultado:

$$x_{n+1}^{(i)} = f\left((1 - \varepsilon)x_n^{(i)} + \frac{\varepsilon}{2}(x_n^{(i-1)} + x_n^{(i+1)})\right), \quad (2.10)$$

Esta substituição parece não alterar qualitativamente nenhum dos resultados obtidos com a primeira forma do mapa.

O caso extremo de acoplamentos não-locais é o chamado *acoplamento global*, onde todos os sítios da rede interagem com todos, tal que o sítio acopla na verdade com uma média sobre toda a rede. Por este motivo, este caso também é chamado de acoplamento do tipo “campo médio” (Kaneko, 1991)

$$x_{n+1}^{(i)} = (1 - \varepsilon)f(x_n^{(i)}) + \frac{\varepsilon}{N-1} \sum_{j=1, j \neq i}^N f(x_n^{(j)}). \quad (2.11)$$

Um acoplamento global deste gênero justifica-se, por exemplo, numa simulação computacional de uma rede neural, onde cada unidade (neurônio) interage com uma grande quantidade (da ordem de 100) de outras unidades.

Nós poderíamos, ainda, imaginar acoplamentos não-locais que levassem em conta a distância de um sítio a outro na rede, quando fosse computada sua influência relativa. Por exemplo, um tipo de acoplamento não-local de alcance variável, na qual a interação entre sítios vizinhos decai com a distância na rede como uma lei de potência, é dado por:

$$x_{n+1}^{(i)} = f(x_n^{(i)}) + \frac{\varepsilon}{\eta(\alpha)} \sum_{j=1}^{N'} \frac{1}{j^\alpha} (f(x_n^{(i-j)}) - 2f(x_n^{(i)}) + f(x_n^{(i+j)})), \quad (2.12)$$

onde $N' = (N - 1)/2$, e

$$\eta(\alpha) = 2 \sum_{j=1}^{N'} \frac{1}{j^\alpha} \quad (2.13)$$

é um fator de normalização que depende do parâmetro de alcance α . Ele vem da observação que a somatória no termo de acoplamento acima é, na verdade, uma média aritmética ponderada de parcelas do tipo $f(x_n^{(i-j)}) - 2f(x_n^{(i)}) + f(x_n^{(i+j)})$, sendo o fator $\eta(\alpha)$ a soma dos pesos estatísticos correspondentes. Este acoplamento foi introduzido por Rogers e Wille (Rogers, 1996) para uma cadeia de osciladores, e estendido por Viana e Batista para redes de mapas acoplados (Viana, 1998).

Vamos considerar alguns casos limites desta expressão. Para $\alpha = 0$ obtemos o acoplamento do tipo global de campo médio (2.11). Se $\alpha \rightarrow \infty$ temos o acoplamento local Laplaciano futuro (2.9).

2.1.3 Condições Iniciais e de Contorno

Sendo um sistema espacialmente extenso, uma rede de mapas acoplados precisa de condições de contorno adequadas (nos extremos da rede: $i = 0$ e $i = N - 1$)

1. fixas: $x_n^{(0)} = a, x_n^{(N-1)} = b$, onde usualmente $a = b = 0$;
2. periódicas: $x_n^{(0)} = x_n^{(N)}$, ou em geral $x_n^{(i)} = x_n^{(i+N)}$ para todo i (mais utilizado);
3. livres: $x_n^{(0)}$ e $x_n^{(N-1)}$ podem ter quaisquer valores;
4. mistas: uma extremidade fixa e outra livre;

Devem ser também especificadas condições iniciais em $n = 0$ para a rede. Dentre as diversas escolhas possíveis, destacamos as seguintes:

1. perfil constante: $x_0^{(i)} = \text{const.}$;
2. perfil senoidal: $x_0^{(i)} = A + B\text{sen}(2\pi i/N)$;
3. perfil gaussiano: $x_0^{(i)} = C \exp(-(i - j)^2/N)$;
4. perfil aleatório: $x_0^{(i)}$ = número pseudo-aleatório dentro de um certo domínio, como $[0, 1]$.

Certas características, como veremos, dependem desta escolha. Outras não, razão pela qual os perfis iniciais aleatórios são preferíveis em muitas aplicações (Viana, 2001).

2.2 Acoplamento local

Uma rede de mapas acoplados é um sistema dinâmico que pode ser usado para descrever variações no espaço e tempo em processos de interesse físico. Uma grande classe de sistemas pode ser modelada por uma equação de difusão e reação periodicamente forçada

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + G(t)R(u), \quad (2.14)$$

sendo $u = f(x, t)$, x é a posição, t é o tempo, D é a constante de difusão, R é a reação não linear e G é uma função periódica no tempo. Considerando

$$G(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \delta(t - k\tau), \quad (2.15)$$

podemos integrar (2.14) sobre um intervalo infinitesimal $[n\tau - \varepsilon, n\tau + \varepsilon]$,

$$\int_{n\tau - \varepsilon}^{n\tau + \varepsilon} \frac{\partial u}{\partial t} dt = \int_{n\tau - \varepsilon}^{n\tau + \varepsilon} D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dt + \int_{n\tau - \varepsilon}^{n\tau + \varepsilon} R(u) \sum_{k=0}^{\infty} \delta(t - k\tau) dt, \quad (2.16)$$

obtendo

$$u(x, n\tau + \varepsilon) = u(x, n\tau - \varepsilon) + R(u(x, n\tau)). \quad (2.17)$$

No intervalo $[n\tau + \varepsilon, (n+1)\tau - \varepsilon]$, somente a difusão atua. Logo, introduzindo

$$\frac{du}{dt} = \frac{u(iw, (n+1)\tau - \varepsilon) - u(iw, n\tau + \varepsilon)}{\tau} \quad (2.18)$$

e

$$\frac{d^2 u}{dx^2} = \frac{u((i+1)w, n\tau + \varepsilon) - 2[u(iw, n\tau + \varepsilon)] - u((i-1)w, n\tau + \varepsilon)}{w^2}, \quad (2.19)$$

na equação (2.14), sendo w o intervalo espacial entre os sítios i e $i+1$, temos

$$\frac{u(iw, (n+1)\tau - \varepsilon) - u(iw, n\tau + \varepsilon)}{\tau} = D \frac{u((i+1)w, n\tau + \varepsilon) - 2[u(iw, n\tau + \varepsilon)] - u((i-1)w, n\tau + \varepsilon)}{w^2}, \quad (2.20)$$

Assim, definindo $u_n^{(i)} = u(iw, n\tau)$, encontramos o sistema para mapas acoplados

$$u_{n+1}^{(i)} = f(u_n^{(i)}) + a_O f(u_n^{(i)}) + a_L f(u_n^{(i-1)}) + a_R f(u_n^{(i+1)}), \quad (2.21)$$

onde o mapa local é

$$f(u) = u + R(u), \quad (2.22)$$

e

$$\begin{aligned} a_O &= -2\varepsilon, \\ a_L &= a_R = \varepsilon, \end{aligned} \quad (2.23)$$

com $\varepsilon = D\tau/w^2$, que é a constante de acoplamento (Lichtenberg, 1983). Finalmente, substituindo os valores das equações (2.23) na equação (2.21) e trocando a variável u para x para deixar na forma mais usual encontrado na literatura, temos o acoplamento para mapas chamado de laplaciano local:

$$x_{n+1}^{(i)} = (1 - \varepsilon)f(x_n^{(i)}) + \frac{\varepsilon}{2}[f(x_n^{(i-1)}) + f(x_n^{(i+1)})]. \quad (2.24)$$

sendo que ε é chamado de parâmetro de acoplamento.

Devido às fronteiras da rede, no acoplamento local, utilizam-se condições de contorno, que podem ser: fixas, periódicas, etc.... Assim como o mapa tem a necessidade de um valor inicial para que os próximos valores sejam obtidos por iterações, também uma rede de mapas acoplados necessita de valores iniciais, os quais podem ser: funções periódicas, funções aleatórias, gaussianas, constantes, etc.

Para analisarmos de uma forma quantitativa o acoplamento local de mapas utilizaremos o mapa logístico ($x \in [0, 1]$ e $r \in [1, 4]$)

$$f(x) = rx(1 - x), \quad (2.25)$$

onde r é o parâmetro de controle. Consideraremos condições iniciais aleatórias, condições de contorno periódicas e usaremos o acoplamento (2.24).

2.2.1 Domínios e *kinks*

Aumentando o parâmetro r , o mapa logístico isolado, exibe duplicação de período e a partir de $r_\infty \approx 3,59$ atinge um comportamento caótico. Usando o acoplamento

dado pela relação (2.24), a rede de mapas passa a apresentar domínios e *kinks*. Os domínios são os sítios que estão correlacionados espacialmente e são separados entre si por *kinks* e *antikinks*, sendo que podem ser visualizados através dos gráficos sítio *versus* variável de estado. Aumentando o valor de r , a rede de mapas acoplados exhibe duplicação de período dos domínios e depois da cascata de duplicação o sistema exhibe comportamento caótico.

Para entender a formação dos domínios vamos analisar primeiramente o sistema desacoplado para o valor de r em que os mapas apresentam período 2. Devido as condições iniciais os sítios adjacentes podem ter soluções com fases diferentes, por exemplo, o sítio i pode exhibir: x_1, x_2, \dots , e o sítio $i + 1$: x_2, x_1, \dots . Para o sistema acoplado esta estrutura persiste, só que os *kinks* são suavizados e estendidos sobre vários sítios da rede devido à difusão. Com o decorrer das iterações um *antikink* toma o lugar de um *kink* e vice-versa, formando um nodo estacionário centrado em um ciclo periódico instável, que foi estabilizado devido ao acoplamento. Então a estrutura dos domínios é fixa e depende das condições iniciais, e há a coexistência de muitos atratores diferentes no sistema (Lichtenberg, 1983).

A figura (2.1) mostra a situação em que o padrão é estacionário e os domínios apresentam comportamentos regulares, sendo que foi considerado $\varepsilon = 0, 2, r = 3, 5$, condições iniciais aleatórias, condições de contorno periódicas e corresponde a sobreposição de 32 iterações, a partir de 1000 iterações transientes desprezadas. É possível, variando o parâmetro de acoplamento e o de controle, que a rede tenha domínios regulares e domínios com comportamento caótico, chamado de padrão aleatório congelado. Os padrões são ditos estacionários porque não há alterações no tamanho dos domínios, após um transiente, com o decorrer das iterações, bem como da posição dos *kinks* (Batista, 1996).

2.2.2 Seleção de padrão com supressão de caos

Aumentando o parâmetro de controle r os domínios maiores começam a se tornar instáveis e dividem-se em domínios pequenos. Após um transiente, os domínios com um determinado tamanho são selecionados. Depois da seleção, a posição dos domínios é congelada e eles não se movem no espaço. O tamanho dos domínios é selecionado tal que os domínios apresentem uma dinâmica menos caótica. No padrão congelado o caos é suprimido apenas nos domínios de tamanho pequeno.

A difusão tende a tornar o sistema homogêneo, enquanto que o movimento caótico faz o sistema não ser homogêneo devido à sensível dependência nas condições iniciais. Estas duas tendências são conflitantes e o padrão com o menor expoente de Lyapunov é selecionado (Kaneko, 1993).

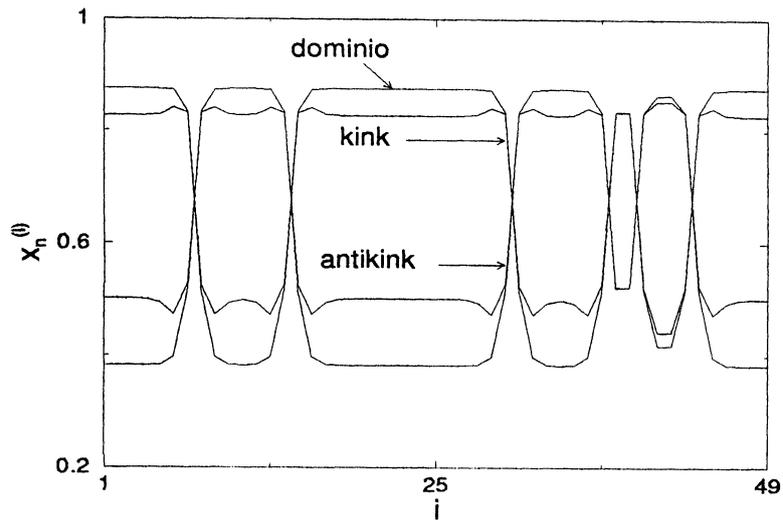


Figura 2.1: Variável de estado versus sítio para uma rede de 49 mapas logísticos acoplados localmente. Foram consideradas condições iniciais aleatórias, condições de contorno periódicas, $\varepsilon = 0, 2$ e $r = 3, 5$. A figura corresponde a sobreposição de 32 iterações, a partir de 1000 iterações transitientes desprezadas.

2.2.3 Estruturas *zigzag*

Uma grande classe de mapas acoplados em rede exibem estruturas *zigzag*, sendo que estas estruturas são caracterizadas pela condição

$$(x_n^{(i+1)} - x_n^{(i)})(x_n^{(i)} - x_n^{(i-1)}) < 0. \quad (2.26)$$

ou a condição

$$(x_n^{(i+1)} - x^*)(x_n^{(i)} - x^*) < 0, \quad (2.27)$$

com $x^* = 1 - 1/r$, ponto fixo instável para o mapa logístico.

A estrutura *zigzag* é observada em acoplamentos (2.24) para o caso onde a intensidade do acoplamento é fraca. Com o acoplamento (2.24) a instabilidade *zigzag* é suprimida, especialmente com a intensidade do acoplamento forte, já que os sítios vizinhos são mantidos em fase pela sua futura ou pré-iteração. As estruturas *zigzags* são importantes porque podem levar a uma rota de quase periodicidade para o caos (Crutchfield e Kaneko, 1987).

Pode existir caos localizado como um defeito, como mostra a figura (2.2), entre dois padrões *zigzag* com diferentes fases de oscilação. O defeito é localizado no espaço e sua forma muda caoticamente no tempo. A oscilação de um defeito é caótica, sendo confirmado pela existência de expoentes de Lyapunov positivos. No padrão congelado a estrutura *zigzag* é fixa no espaço e apresenta temporalmente período dois. Já na difusão de defeitos, o padrão *zigzag* é modulado quase periodicamente no tempo e os defeitos podem mover-se no espaço, bem como mudar de tamanho (Kaneko, 1989 a).

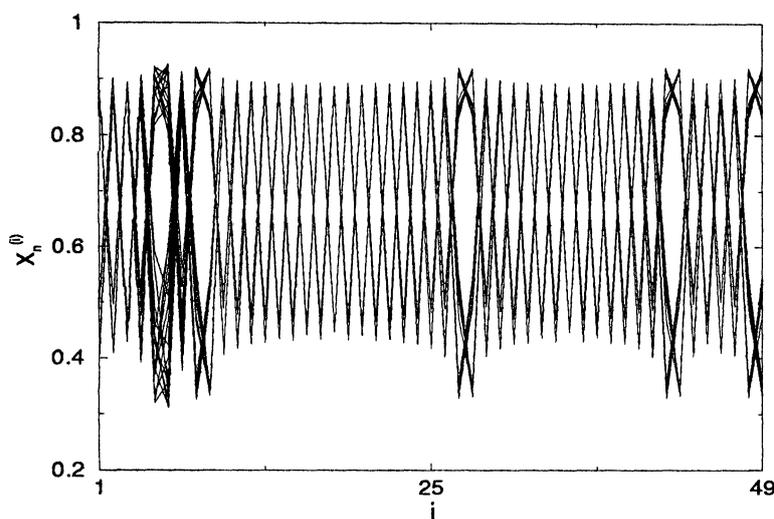


Figura 2.2: Estruturas zigzag com defeito para o mapa logístico acoplado localmente com $r = 3,84$ e $\varepsilon = 0,11$. A figura corresponde a sobreposição de 32 iterações, a partir de 1000 iterações transitentes desprezadas.

2.2.4 Intermitência espaço temporal

Na intermitência espaço temporal há movimentos laminares e irregulares (*bursts*) no espaço e no tempo. O movimento laminar é caracterizado por uma dinâmica periódica ou fracamente caótica com estruturas regulares, enquanto que os *bursts* não têm estruturas regulares (Chaté, 1988).

Existem dois tipos de intermitência espaço temporal. Na intermitência espaço temporal do tipo I não há a criação espontânea de um *burst*, ou seja, se um sítio e seus vizinhos são regulares, na próxima iteração ele permanece regular. Na intermitência do tipo II há a criação espontânea de *burst*, isto é, se um sítio e seus vizinhos são regulares existe uma probabilidade deste sítio deixar de ser regular na próxima iteração (Kaneko, 1993).

2.3 Acoplamento global

No acoplamento global de mapas os elementos interagem com todos os elementos da rede pela seguinte relação

$$x_{n+1}^{(i)} = (1 - \varepsilon)f(x_n^{(i)}) + \frac{\varepsilon}{N} \sum_{j=1}^N f(x_n^{(j)}), \quad (2.28)$$

sendo que n é o tempo, o qual é discreto, N o tamanho da rede e i ($i = 0, 1, 2, \dots, N$) é o índice de cada elemento da rede. Esta forma de acoplamento é denominada na literatura como *campo médio* (Kaneko, 1991).

Pode-se classificar o estado do acoplamento global pelo número de aglomerados k e o número de elementos de cada aglomerado N_k , com $N_1 \geq N_2 \geq \dots \geq N_k$ (ver figura 2.3). Um aglomerado é definido com um conjunto de elementos em que $x^{(i)} = x^{(j)}$ para i, j pertencentes ao mesmo aglomerado. Desta forma, o atrator pode ser caracterizado pela condição $[k, (N_1, N_2, \dots, N_k)]$.

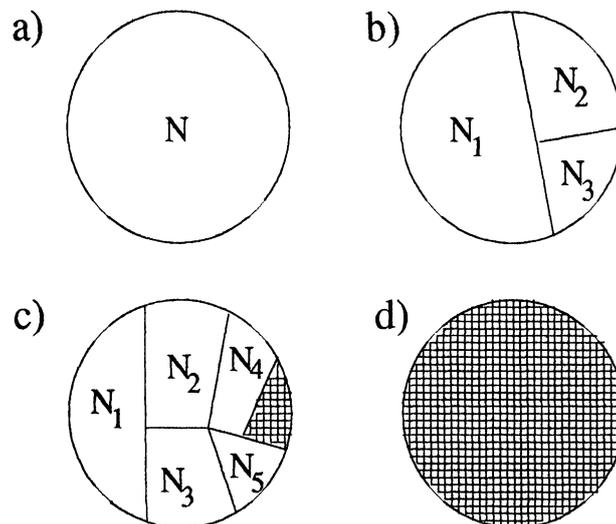


Figura 2.3: Figura esquemática para agrupamentos: a) Atrator coerente. b) Poucos agrupamentos. c) Muitos agrupamentos com partições diferentes. d) Muitos agrupamentos com $k = N$.

Se o sistema é atraído exatamente para um k -aglomerado com (N_1, N_2, \dots, N_k) , o sistema não sai do estado deste aglomerado, desde que o movimento para $x_n^{(i)}$ e $x_n^{(j)}$ no tempo $n > m$ seja governado pela mesma dinâmica, ou seja, $x_n^{(i)} = x_n^{(j)}$ se $x_m^{(i)} = x_m^{(j)}$.

2.4 Acoplamento tipo lei de potência

O acoplamento tipo lei de potência é dado pela relação

$$x_{n+1}^{(i)} = f(x_n^{(i)}) + \frac{\varepsilon}{\eta(\alpha)} \sum_{j=1}^{N'} \frac{1}{j^\alpha} [f(x_n^{(i+j)}) - 2f(x_n^{(i)}) + f(x_n^{(i-j)})], \quad (2.29)$$

onde para N ímpar temos

$$N' = \frac{N-1}{2}, \quad (2.30)$$

$$\eta(\alpha) = 2 \sum_{j=1}^{N'} \frac{1}{j^\alpha}, \quad (2.31)$$

sendo que α está relacionado ao alcance efetivo entre sítios vizinhos do sítio i . Este acoplamento, como veremos a seguir, recai na forma do acoplamento local (2.24) e na forma do acoplamento global (2.28) dependendo do valor de α .

Considerando $\alpha = 0$ a equação (2.31) toma a seguinte forma

$$\eta = 2N' = N - 1, \quad (2.32)$$

logo, a equação (2.29) torna-se

$$\begin{aligned} x_{n+1}^{(i)} = & f(x_n^{(i)}) + \frac{\varepsilon}{N-1} [-2N' f(x_n^{(i)})] + \frac{\varepsilon}{N-1} \{f(x_n^{(i+1)}) + f(x_n^{(i-1)}) \\ & + f(x_n^{(i+2)}) + f(x_n^{(i-2)}) + \dots + f(x_n^{(i+N')}) + f(x_n^{(i-N')})\}, \end{aligned} \quad (2.33)$$

como $N' = (N-1)/2$, obtemos

$$x_{n+1}^{(i)} = (1 - \varepsilon)f(x_n^{(i)}) + \frac{\varepsilon}{N-1} \sum_{j=1, j \neq i}^N f(x_n^{(j)}), \quad (2.34)$$

que é a equação para o acoplamento global.

Agora consideraremos o caso de α tendendo a infinito. Com esta consideração somente os termos com $j = 1$ contribuem na equação (2.31), que apresenta a seguinte forma: $\eta = 2$. Logo, temos o acoplamento local

$$x_{n+1}^{(i)} = (1 - \varepsilon)f(x_n^{(i)}) + \frac{\varepsilon}{2}[f(x_n^{(i+1)}) + f(x_n^{(i-1)})]. \quad (2.35)$$

É possível escrever o acoplamento (2.29) como $x_{n+1}^{(i)} = f(x_n^{(i)}) + \varepsilon\tau^{(i)}(\alpha, x_n)$, onde foi introduzido um termo de interação

$$\tau^{(i)}(\alpha, x_n) = \frac{1}{\eta(\alpha)} \sum_{j=1}^{N'} \frac{1}{j^\alpha} [f(x_n^{(i+j)}) - 2f(x_n^{(i)}) + f(x_n^{(i-j)})], \quad (2.36)$$

O termo de interação é nulo para os sítios que estão no domínio onde todos os mapas estão em fase, isto é, têm o mesmo valor para a variável de estado em um dado instante de tempo. Uma distribuição linear da forma $f(x_n^{(i)}) = \xi i$ (onde ξ é uma constante) faz com que o termo de interação se anule para todos os sítios, já que

$$f(x_n^{(i+j)}) - 2f(x_n^{(i)}) + f(x_n^{(i-j)}) = \xi(i+j - 2i + i - j) = 0. \quad (2.37)$$

É difícil obter expressões analíticas para o termo de interação $\tau^{(i)}$, exceto em alguns casos particulares, como uma distribuição quadrática $f(x_n^{(i)}) = (2/N)^2 i^2$, que fornece

$$\tau^{(i)}(\alpha) = \frac{1}{\eta(\alpha)} \sum_{j=1}^{N'} \frac{1}{j^\alpha} \left[\frac{4}{N^2} (i+j)^2 - 2 \frac{4}{N^2} i^2 + \frac{4}{N^2} (i-j)^2 \right] = \frac{1}{\eta(\alpha)} \sum_{j=1}^{N'} \frac{1}{j^\alpha} \frac{4}{N^2} 2j^2, \quad (2.38)$$

como $\eta(\alpha) = 2 \sum_{j=1}^{N'} 1/j^\alpha$, obtemos

$$\tau^{(i)}(\alpha) = \frac{4}{N^2} \frac{\sum_{j=1}^{N'} j^{2-\alpha}}{\sum_{j=1}^{N'} j^{-\alpha}}, \quad (2.39)$$

onde a sua magnitude diminui exponencialmente com α .

O acoplamento (2.29) foi utilizado (Viana, 1998) para estudar a sincronização de mapas prototípicos de Ding (Ding, 1987)

$$\tan \theta_{n+1} = \frac{\text{sen}(\theta_n + 2\pi b\Omega)}{2a + \text{cos}(\theta_n + 2\pi b\Omega)}, \quad (2.40)$$

onde a e b são os parâmetros de não linearidade e Ω é a frequência natural do sistema. Neste trabalho é considerado, para uma distribuição inicial de frequências naturais aleatórias, que dois ou mais mapas, ao serem acoplados, estão sincronizados quando apresentam o mesmo número de rotação (*winding number*).

Para valores baixos de α o acoplamento é essencialmente de natureza global e todos os sítios interagem de uma maneira significativa com cada mapa da rede. Um grande efeito de difusão é esperado em tais acoplamentos e observa-se que é fácil obter sincronização, a menos que se use um acoplamento baixo. Isto é refletido em uma dispersão pequena observada em torno do número de rotação médio. Já para valores altos de α o acoplamento é local e o efeito da difusão é limitado. Em particular, não é suficientemente forte para transpor a desordem aleatória congelada das frequências naturais, logo a sincronização é mais difícil de ocorrer. Entre estes dois casos limites existe uma transição de fase, a qual se mostrou abrupta considerando a forma da dispersão do número de rotação nas vizinhanças de $\alpha = 1$ (Viana, 1998).

O acoplamento (2.29) também foi utilizado para estudar a transição entre estados sincronizados e não sincronizados de redes de mapas do seno-círculo variando o alcance (Pinto, 2000). Foi calculado o comprimento dos platôs de sincronização encontrando uma distribuição exponencial para o acoplamento local.

Capítulo 3

Memórias em Rede de Mapas Acoplados

Consideraremos redes de mapas acoplados (Kaneko, 1993) com o intuito de analisar a formação de memórias em um sistema dinâmico com muitos graus de liberdade. O sistema, uma simples equação de difusão discretizada, armazena memórias, sendo que este mecanismo de memória pode ser comparado ao da rede neural (Hopfield, 1982), que é um sistema dinâmico com parâmetros ajustáveis, o qual armazena padrões desejados que minimizam uma energia funcional.

A possibilidade de formação de memórias foi recentemente explorada para explicar o experimento de uma onda de densidade de carga (*CDW*) em $NbSe_3$, em que a memória codificada é manifestada como a sincronização da resposta a pulsos elétricos periódicos tal que V/I (V =voltagem, I =corrente da onda de densidade de carga, que é proporcional a velocidade da onda de densidade de carga v) diminui quando cada pulso cessa (Coppersmith, 1987) (Coppersmith, 1997).

Uma rede de mapas acoplados com pulsos periódicos foi proposta para explicar a formação de memórias de curta duração. Isto significa que a rede armazena uma seqüência de pulsos por um curto espaço de tempo e posteriormente perde quase toda a informação quando a perturbação externa é desligada. O sistema é deterministicamente forçado para um ponto fixo. Uma vez que este ponto é atingido, é impossível recuperar as memórias de curta duração. Portanto, é possível manter as memórias transientes adicionando um ruído ao sistema, já que múltiplas memórias são observadas em amostras de $NbSe_3$, quando é feito um arranjo que induz ruído ao experimento.

Exploraremos algumas das conseqüências da rede de mapas acoplados usada por Coppersmith et al. na modelagem mencionada do experimento de "CDW" (Coppersmith, 1997). Em particular analisaremos a influência da natureza do mapa que caracteriza a rede sobre a duração do transiente necessário para atingir a memória permanente. Também iremos analisar a formação de múltiplas memórias

permanentes introduzindo uma baixa não linearidade ao sistema.

A forma do acoplamento que utilizaremos é dada por (x é a variável de estado, que pode representar alguma propriedade física, como a posição de uma partícula ou a fase numa oscilação, por exemplo)

$$x_{n+1}^{(i)} = f(x_n^{(i)}) + \text{int} \left\{ k[f(x_n^{(i-1)}) - 2f(x_n^{(i)}) + f(x_n^{(i+1)})] - (1 + A_n) \right\} \quad (3.1)$$

onde o tempo n é discreto ($n = 0, 1, 2, \dots$), i é o índice referente as posições dos mapas na rede ($i = 1, 2, \dots, N = \text{tamanho do sistema}$), k é o parâmetro de acoplamento entre os mapas, $f(x)$ é o mapa característico de cada sítio e $\text{int}(x)$ a parte inteira de x . Esta equação descreve a dinâmica das posições de N partículas em um poço de potencial periódico, com as partículas vizinhas conectadas por molas de constante elástica $k < 1$, sendo que todas as partículas estão na presença de uma força impulsiva da forma $(1 + A_n)$. A equação descreve a dinâmica de uma onda de densidade de carga deslizando ("CDW"), e está relacionada a modelos de uma variedade de sistemas dinâmicos (Carlson, 1989) (Herz, 1995). Propomos uma abordagem de armazenamento de memórias que emprega tais mapas como elementos dinâmicos com um contínuo de estados possíveis.

A dinâmica do mapa isolado, que acoplaremos por meio de (3.1), é descrita pela seguinte relação

$$f(x) = x + rx^2, \quad (3.2)$$

sendo que $r > 0$ controla a não linearidade do sistema.

Primeiramente, consideraremos o acoplamento para a situação em que o mapa isolado apresenta um comportamento linear ($r = 0$). Definimos uma variável de curvatura $c_n^{(i)}$, que recebe esta denominação por vir de uma derivada segunda, pela relação

$$c_n^{(i)} = k[f(x_n^{(i-1)}) - 2f(x_n^{(i)}) + f(x_n^{(i+1)})], \quad (3.3)$$

sendo que podemos verificar que a rede apresenta um padrão, ou memória, quando a variável de curvatura $c_n^{(i)}$ torna-se constante em uma determinada região.

Acoplando 10 mapas em uma rede unidimensional com uma extremidade fixa e uma livre

$$x_n^{(0)} = 0 \qquad x_n^{(N+1)} = x_n^{(N)}, \qquad (3.4)$$

e aplicando pulsos A_n em ciclos que se repetem com valores 9 e 10 ($A_1 = 9, A_2 = 10, A_3 = 9, A_4 = 10, \dots$), podemos verificar pela figura (3.1) que os sítios da rede, após um determinado número de iterações, armazenam certos níveis de memória. Elas são provenientes dos pulsos, que ocasionam na variável de curvatura $c_n^{(i)}$, com o decorrer das iterações, valores constantes. Para os valores de 1 a 9 temos memórias transientes, enquanto para o valor 10 temos uma memória permanente.

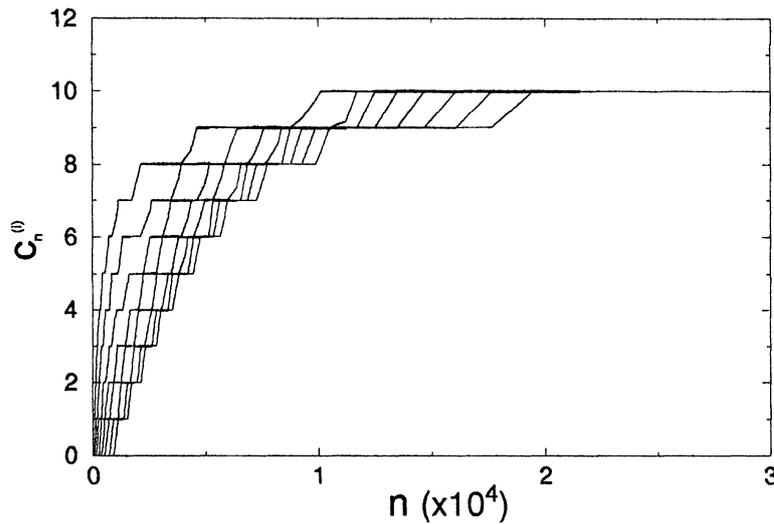


Figura 3.1: Dependência temporal da variável de curvatura para uma rede de mapas acoplados com condições iniciais aleatórias, $k = 0,01$, $N = 10$, $r = 0$, $A_1 = 9$, $A_2 = 10$, $A_3 = 9$, $A_4 = 10, \dots$, e condições de contorno onde uma extremidade é fixa $x_n^{(0)} = 0$ e a outra livre $x_n^{(N+1)} = x_n^{(N)}$.

Para entender como as memórias formam-se, consideremos a figura (3.1). Inicialmente, cada pulso causa um incremento de mesmo valor para cada sítio $x_n^{(i)}$, menos para o mapa acoplado na extremidade fixa que começa a apresentar um acréscimo na variável de curvatura $c_n^{(i)}$. Com o decorrer das iterações, esta variável de curvatura aumenta mais e mais, até que o acoplamento entre o primeiro sítio e a extremidade torna-se grande o bastante para manter o valor da variável de curvatura constante sobre a aplicação de A_1 . Após algumas iterações o acoplamento não é mais suficiente para mudar a ação do pulso A_2 , o que ocasiona o aumento da variável de curvatura até a memória permanente. Ocorre que para o segundo sítio, após o primeiro, começa a variar o valor de $c_n^{(2)}$ e na sequência ocorre a variação do terceiro sítio, e assim por diante. Desta forma as variáveis de curvatura estendem-se para todos os diferentes possíveis valores inteiros de c_n . No final há uma saturação para o valor $c_n^{(i)} = 10$.

O número de iterações para que cada sítio atinja a memória permanente depende da posição i do sítio, do parâmetro de acoplamento k , do tamanho da rede N e do pulso A . Analisaremos, primeiramente, a dependência do número de iterações com relação ao tamanho da rede. Considerando $k = 0,01$ e somente uma memória para o pulso $A = 10$, obtemos a seguinte relação

$$n(i) = a_0 + a_1i + a_2i^2 + a_3i^3 + a_4i^4, \quad (3.5)$$

onde a_m ($m = 0, 1, 2, 3, 4$) são os coeficientes do polinômio e funções do tamanho da rede. A equação (3.5) foi obtida por meio de um ajuste polinomial na curva do gráfico de n versus i , como pode ser visto na figura (3.2). Podemos observar que quanto mais próximo estivermos da extremidade fixa da rede, menos tempo o sítio levará para atingir a memória permanente. Este aumento, porém, é não linear a medida em que nos aproximamos da extremidade livre.

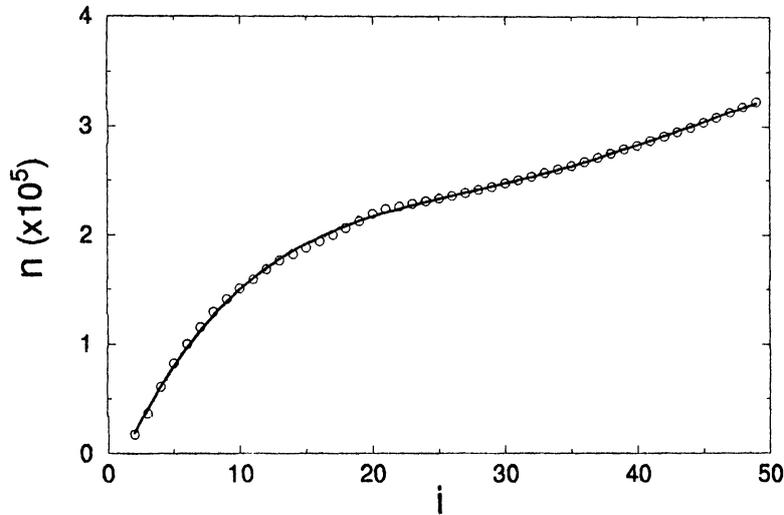


Figura 3.2: Duração do transiente para a memória $c^{(i)} = 10$ versus a posição i na rede, para $N = 50$, $k = 0,01$, $A = 10$, $x_0^{(i)} = 0$, uma extremidade fixa e uma livre.

Analisaremos a dependência do número de iterações, para que um sítio chegue na memória permanente, com o parâmetro de acoplamento k . Fixamos o tamanho da rede em $N = 50$ e a intensidade dos pulsos em $A = 10$ e verificamos que tal dependência ocorre da forma

$$n = bk^{-1}, \quad (3.6)$$

sendo que b é constante para cada sítio. Vemos que, quanto menor a intensidade do acoplamento, seja qual for o sítio, maior será a duração do transiente. Mantendo constante o tamanho da rede e o parâmetro de acoplamento, ocorre que a dependência do número de iterações com a intensidade de A depende de A^5 .

Agora, analisaremos a situação para $r > 0$, ou seja, o caso onde temos um mapa com um comportamento não linear. Para $r = 0$, o mapa isolado apresenta um contínuo de pontos fixos estáveis e para $r > 0$ temos uma variação na variável de estado x de forma não linear, que depende do parâmetro r . A pequena variação em x , para um pequeno r , ocorre porque a curva do gráfico x versus $f(x)$, no mapa isolado, fica próxima da reta $f(x) = x$. Esta pequena variação na variável de estado é suficiente para que, quando acoplados, os sítios apresentem memórias diferentes. Surgem memórias isoladas, bem como, grupos de sítios com a mesma memória. A figura (3.3) mostra sítios com memórias diferentes para a realização do acoplamento com o mapa fracamente não linear ($r = 10^{-8}$). Apesar de termos uma baixa não linearidade os valores da variável de estado x são da ordem de 10^4 , o que faz com que o termo não linear torne-se importante para a dinâmica do sistema.

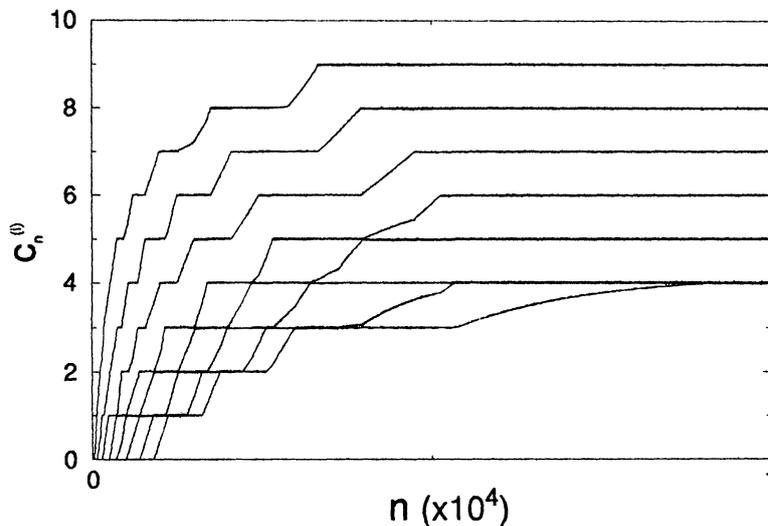


Figura 3.3: $c_n^{(i)}$ versus n para o acoplamento com o mapa não linear, considerando $N = 10$, $k = 0,01$, $r = 10^{-8}$, $A = 10$ e condições iniciais aleatórias, com uma extremidade fixa e uma livre.

Com o aumento da não linearidade os valores da variável de curvatura vão se aproximando de zero. Os valores de $c_n^{(i)}$ vão indo para zero porque os mapas começam a sincronizar, ou seja, começam a apresentar o mesmo valor da variável de estado x . Quando acontece a sincronização os mapas apresentam a variável de curvatura nula e o efeito da sincronização ocorre nos mapas a partir da extremidade livre.

Para a situação em que o mapa apresenta um comportamento não linear ($r > 0$), verificamos diferentes valores para a variável de curvatura c . Estes valores, após tornarem-se constantes, serão a base para o armazenamento de padrões.

Vamos considerar um exemplo específico para ver porque múltiplas memórias são encontradas no caso de termos uma não linearidade fraca. Começamos escrevendo a variável de curvatura para o mapa quadrático

$$c_n^{(i)} = k \left\{ x_n^{(i-1)} - 2x_n^{(i)} + x_n^{(i+1)} + r \left[(x_n^{(i-1)})^2 - 2(x_n^{(i)})^2 + (x_n^{(i+1)})^2 \right] \right\}. \quad (3.7)$$

Consideramos uma rede com 6 sítios, $A = 10$ e $k = 0,01$. No caso linear ($r = 0$), temos os seguintes valores estacionários para as variáveis de estado: $x^{(2)} = -11000$, $x^{(3)} = -15000$, $x^{(4)} = -18000$, $x^{(5)} = -20000$. Substituindo esses valores na equação (3.7) podemos obter as memórias armazenadas $c^{(3)} = c^{(4)} = 10$. Se adicionarmos uma não linearidade pequena ($r = 10^{-8}$), diferentes valores estacionários são obtidos (realizando em torno de 4 bilhões de iterações): $x^{(2)} = -9472$, $x^{(3)} = -12709$, $x^{(4)} = -15047$, $x^{(5)} = -16583$. Usando (3.7), temos as seguintes memórias diferentes: $c^{(3)} = 9.05$ and $c^{(4)} = 8.11$.

Esta característica sugere o uso de uma rede de mapas não lineares acoplados para armazenar informações mais complexas. O armazenamento será realizado por meio de uma matrix gráfica (fig. 3.4), na qual cada célula corresponde a um intervalo de valores da variável de curvatura. A célula é hachurada quando o valor da variável de curvatura está compreendido no intervalo indicado. O valor é considerado, após um determinado número de iterações, quando se torna constante.

Quando $r = 0$ e $A = 16$, para uma rede de 18 mapas, todos os sítios, depois de algumas iterações, apresentam o valor $c = 16$. Portanto, temos apenas uma célula hachurada. Já para esta mesma situação, considerando $r > 0$, teremos diferentes células hachuradas. Desta forma, para $r > 0$, temos uma dependência dos padrões formados com relação ao parâmetro de não linearidade do mapa (r) e com o parâmetro de acoplamento (k), sendo que isto não ocorre para $r = 0$. A dependência em relação a k e r é devida ao número de sítios que sincronizam. A quantidade de sítios sincronizados aumenta diminuindo o parâmetro k . Com a diminuição de k a influência da dinâmica dos sítios vizinhos sobre o sítio i diminui, havendo uma predominância da força externa. Assim, cada pulso causa um incremento de mesmo valor para cada $x^{(i)}$, ocasionando os sítios sincronizados. Já o sítio preso na extremidade fixa alonga-se e altera a dinâmica do sítio vizinho fazendo com que ele também alongue-se, dependendo do valor do parâmetro de acoplamento k . Esta alongação produz os sítios que não sincronizam e exibem $c > 0$. Portanto, os diferentes valores de c ocorrem devido a influência dos sítios vizinhos sobre o sítio i .

[3,4[[7,8[[11,12[[15,16[
[2,3[[6,7[[10,11[[14,15[
[1,2[[5,6[[9,10[[13,14[
[0,1[[4,5[[8,9[[12,13[

Figura 3.4: Matriz gráfica onde cada célula representa um intervalo dos valores da variável de curvatura c .

Considerando valores para k e r podemos armazenar padrões, só que apenas saberemos que padrão foi armazenado depois de algumas iterações. Desta forma, para armazenar um padrão desejado, devemos fixar valores de c para cada sítio fazendo com que apenas as células desejadas sejam hachuradas. Também devemos fixar k ou r , mas como o sistema diverge para r grande, fixaremos r em um valor pequeno e calcularemos uma equação que forneça os valores de k para a obtenção do padrão desejado.

Usando a equação (3.3), para a situação onde a dinâmica do sítio i é determinada pelos sítios $i + 1$ e $i - 1$, temos

$$f(x_n^{i-1}) - f(x_n^{(i)}) + f(x_n^{(i+1)}) - f(x_n^{(i)}) = \frac{C_n^{(i)}}{k_n^{(i)}}, \quad (3.8)$$

onde $C_n^{(i)}$ é a variável de curvatura fixa no tempo. Como $f(x) = x + rx^2$, obtemos

$$k_n^{(i)} = \frac{C_n^{(i)}}{x_n^{(i-1)} + x_n^{(i+1)} - 2x_n^{(i)} + r[(x_n^{(i-1)})^2 + (x_n^{(i+1)})^2 - 2(x_n^{(i)})^2]}. \quad (3.9)$$

Com a equação (3.9) podemos determinar o valor de $k^{(i)}$ para um determinado valor de $C^{(i)}$. Este valor de $C^{(i)}$ escolhido determina a célula a ser hachurada. Para $C = 0$ na equação (3.9), quando os sítios estão sincronizados, ocorre que

$$x_n^{(i)} = x_n^{(i-1)} = x_n^{(i+1)}, \quad (3.10)$$

isto faz com que a equação para calcular os valores de $k^{(i)}$ (3.9) divirja, pois

$$x_n^{(i-1)} + x_n^{(i+1)} - 2x_n^{(i)} + r[(x_n^{(i-1)})^2 + (x_n^{(i+1)})^2 - 2(x_n^{(i)})^2] = 0, \quad (3.11)$$

portanto, a equação é válida para C diferente de zero.

Como um exemplo da aplicação da equação (3.9), vamos obter o padrão mostrado na figura (3.5) seguindo os intervalos das variáveis de curvatura adotados na figura (3.4).

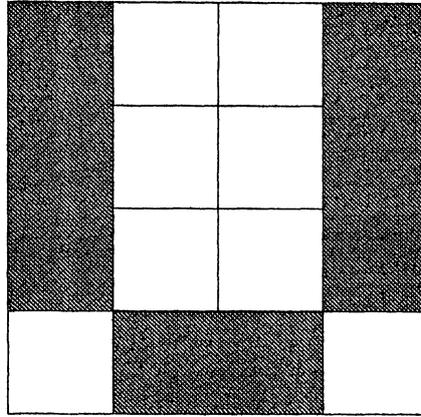


Figura 3.5: $N = 18$, $r = 10^{-7}$, $A = 16$, $k = 0,01$ e condições iniciais aleatórias. As células hachuradas representam os alvos das variáveis de curvatura.

O padrão é obtido para uma rede de 18 sítios, sendo considerada condições iniciais aleatórias, $r = 10^{-7}$ e $A = 16$. Para o cálculo dos valores de $k^{(i)}$ é necessário escolher valores de $C^{(i)}$ que formem o padrão escolhido, que está mostrado na figura (3.5), sendo que escolhemos os seguintes valores:

$$\begin{aligned} C^{(1)} = C^{(2)} = C^{(3)} = C^{(4)} = C^{(5)} = C^{(6)} &= 1, 5; \\ C^{(7)} = C^{(8)} = C^{(9)} &= 2, 5; \quad C^{(10)} = C^{(11)} = 3, 5; \\ C^{(12)} = C^{(13)} &= 4, 5; \quad C^{(14)} = 8, 5; \quad C^{(15)} = 13, 5; \\ C^{(16)} &= 14, 5; \quad C^{(17)} = C^{(18)} = 15, 5. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Com os valores escolhidos de $C^{(i)}$ podemos calcular, por meio da equação (3.9), os respectivos $k^{(i)}$ que fornecem o padrão desejado. Na realidade, o que ocorre é que estamos determinando a intensidade com que os sítios $i + 1$ e $i - 1$ influenciam a dinâmica do sítio i através do parâmetro de acoplamento k . Para os valores fornecidos em (3.12) obtemos os valores dos parâmetros de acoplamento que podem ser vistos na figura (3.6), sendo que tais valores tornam-se constantes depois de um determinado número de iterações.

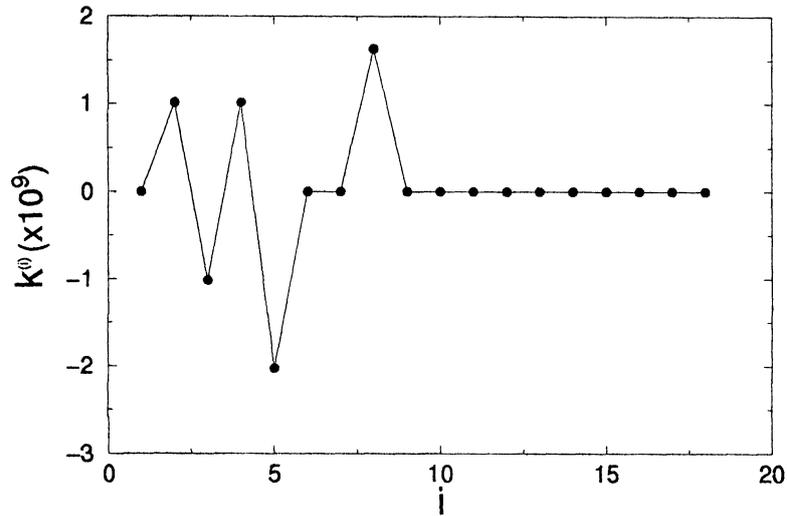


Figura 3.6: Valores de $k^{(i)}$ calculados usando os valores de $C^{(i)}$ que estão mostrados em (3.12). O gráfico exibe a iteração de número 70000, sendo que neste caso os parâmetros de acoplamentos ($k^{(i)}$) já atingiram um valor estacionário.

Agora vamos analisar a construção do padrão fornecido pela figura (3.5) fixando k e variando a perturbação externa A . Para isto, calcularemos os valores da perturbação externa sobre cada sítio utilizando a equação

$$x_{n+1}^{(i)} = f(x_n^{(i)}) + k[f(x_n^{(i-1)}) - 2f(x_n^{(i)}) + f(x_n^{(i+1)})] - (1 + A_n^{(i)}), \quad (3.13)$$

onde $(1 + A_n^{(i)})$ representa a perturbação externa sobre cada sítio i durante o decorrer das iterações. Foi omitido o cálculo da parte inteira, que está presente na equação (3.1), para facilitar a obtenção de uma relação que forneça os valores de $A_n^{(i)}$. Desta forma, obtemos

$$A_n^{(i)} = f(x_n^{(i)}) + C_n^{(i)} - 1 - x_{n+1}^{(i)}, \quad (3.14)$$

assim a equação (3.14) permite a formação de padrões pré-estabelecidos através de perturbações, bastando apenas escolher os valores adequados para as variáveis de curvatura $C_n^{(i)}$.

A figura (3.7) exhibe os valores de $A^{(i)}$ calculados para obtermos o padrão da figura (3.5), a partir dos valores das variáveis de curvatura listadas na relação (3.6). Neste caso, foi considerado $k = 0,2$, $r = 10^{-7}$, condições iniciais aleatórias e uma rede com 18 sítios. Portanto, podemos armazenar padrões por meio de estímulos externos, os quais são aplicados a cada sítio da rede de mapas acoplados.

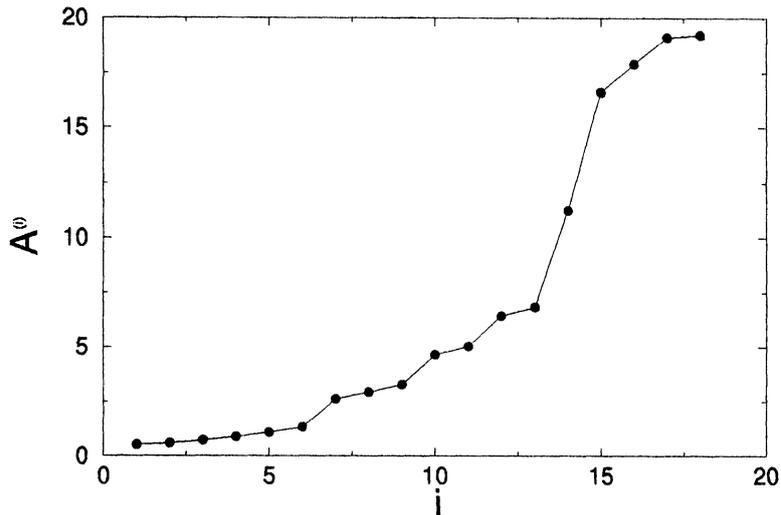


Figura 3.7: Valores de $A^{(i)}$ calculados para a obtenção da figura (3.5), usando os valores de $C^{(i)}$ que estão mostrados em (3.12). O gráfico exhibe a iteração de número 70000, sendo que neste caso as perturbações externas ($A^{(i)}$) já atingiram um valor estacionário.

Os valores das perturbações externas dependem do parâmetro de acoplamento (k) e da não linearidade do sistema (r). A dependência de $A^{(i)}$ quanto ao parâmetro k ocorre em forma de uma função potência, apresentando a seguinte relação para o valor da perturbação mais alta, fixando r ,

$$A = \alpha k^{-\beta} + \gamma, \quad (3.15)$$

onde α , β e γ são constantes. Para a situação em que $r = 10^{-7}$, temos os seguintes valores, aproximados, para as constantes: $\alpha = 0,05$, $\beta = 2,3$ e $\gamma = 17$ (fig 3.8a). Estas constantes foram encontradas tomando-se apenas o valor mais alto da perturbação externa para cada parâmetro de acoplamento k , o qual foi variado no intervalo entre 0,01 e 1. Ocorre, para baixos valores do acoplamento, a necessidade de

uma alta perturbação externa para a formação do padrão. Esta necessidade decorre da diminuição da influência dos sítios vizinhos sobre o sítio i , restando somente a aplicação da perturbação para formar o padrão pré-estabelecido. Já para valores mais altos do acoplamento necessita-se de perturbações baixas, porque neste caso temos um aumento da influência dos vizinhos, os quais também estão sob a aplicação da perturbação externa. Em casos intermediários, o padrão almejado é determinado pela competição entre os efeitos da difusão da rede devido ao acoplamento e as perturbações externas, ou seja, temos um comportamento típico de sistemas do tipo reação-difusão.

A dependência em relação a não linearidade r é da forma de uma função polinomial de segunda ordem

$$A = a_0 + a_1 r + a_2 r^2, \quad (3.16)$$

onde a_0 , a_1 e a_2 são os coeficientes do polinômio. Na figura (3.8b) foi considerado k igual a 0,2, variado r no intervalo entre 10^{-5} a 10^{-8} e obtido $a_0 = 15,25$, $a_1 = 4,65 \cdot 10^7$ e $a_2 = 8,32 \cdot 10^{11}$. Podemos ver que o aumento da não linearidade acarreta em um aumento na perturbação necessária para obter o mesmo padrão (fig. 3.5). Isto é devido a que, com o aumento da não linearidade r , a variável de estado x passa a apresentar grandes alterações em seus valores. Portanto é necessário aumentar as perturbações para controlarmos estas alterações e obtermos o padrão desejado.

Existem casos extremos para a variação da perturbação externa com relação a não linearidade e ao parâmetro de acoplamento. Para o caso em que r é alto e k é baixo, x aumenta rapidamente fazendo com que a maior perturbação externa tenda a infinito. Outra situação é quando não obtemos a formação do padrão pré-estabelecido, o que ocorre para $r = 0$, pois não temos mais a não linearidade no sistema, ou com $k = 0$ que significa que os mapas estão desacoplados.

Concluindo, usamos um fato descoberto recentemente que uma rede de mapas lineares acoplados pode armazenar memórias, e encontramos que o transiente para a memorização aumenta com o tamanho da rede e com a amplitude da perturbação, mas é inversamente proporcional ao parâmetro de acoplamento. Assim para otimizar o tempo de memorização necessitamos de redes pequenas, um alto parâmetro de acoplamento e amplitudes baixas da perturbação. O resultado mais significativo é a possibilidade de armazenar mais do que uma memória permanente usando um mapa fracamente não linear em cada sítio da rede. Isto permite-nos usar mapas acoplados em rede para armazenar algum tipo de informação. Nós podemos escolher um dado padrão almejado para memorizar e variar o parâmetro de acoplamento ou a amplitude da perturbação para conseguir o resultado desejado. É uma forma de método de controle no espaço e tempo (Batista, 2000).

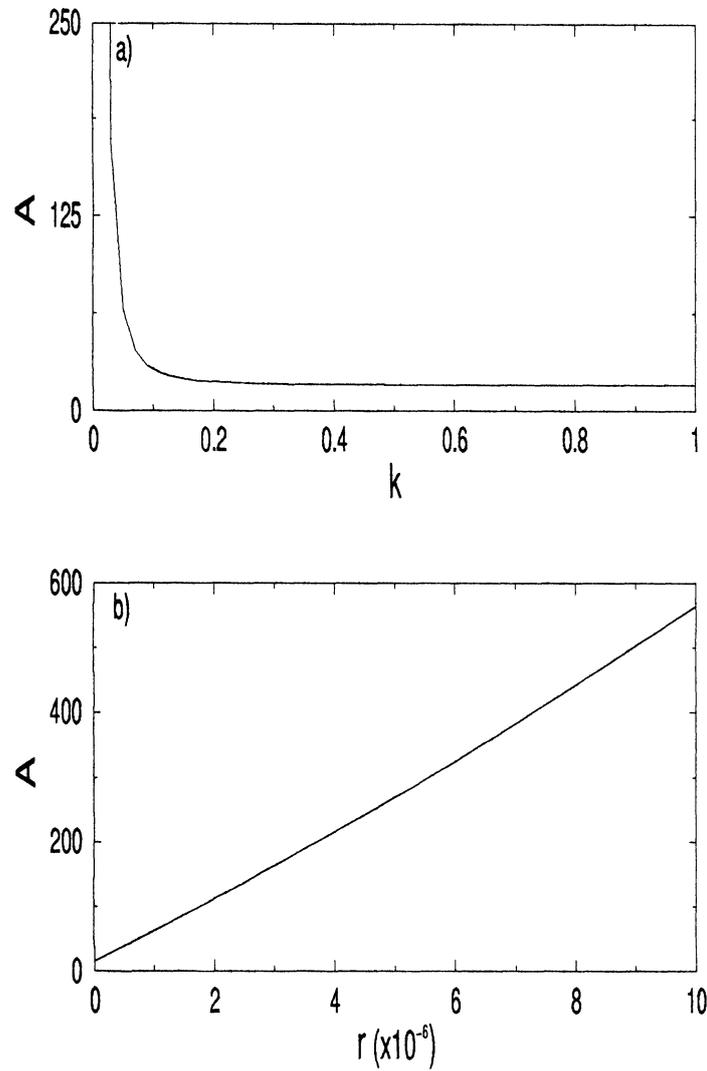


Figura 3.8: Maior valor da perturbação externa necessária para formar o padrão da figura (3.5), com relação : a) ao parâmetro de acoplamento k , e b) a não linearidade r .

Capítulo 4

Memórias em Circuitos RL Acoplados Indutivamente

Neste capítulo analisamos uma rede de equações diferenciais e uma rede de mapas acoplados para analisar a formação de memórias em circuitos RL acoplados por meio de indutores. As memórias a que nos referimos são da forma que foi definida no capítulo anterior.

4.1 Modelo a tempo contínuo

Utilizaremos uma rede de circuitos RL acoplados na forma mostrada na figura (4.1), sendo que o acoplamento ocorre através dos indutores. Como o acoplamento é indutivo a dinâmica de um circuito k será influenciada pelos sítios vizinhos $k - 1$ e $k + 1$.

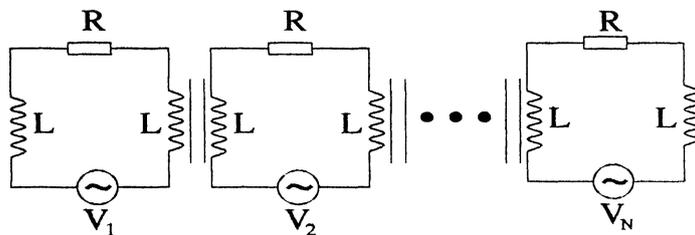


Figura 4.1: N circuitos RL acoplados através da indutância mútua.

Empregando a segunda lei de Kirchhoff, temos que para cada circuito RL a equação é

$$2L \frac{di_k(t)}{dt} + Ri_k(t) = M \left[\frac{di_{k-1}(t)}{dt} + \frac{di_{k+1}(t)}{dt} \right] + V_k(t), \quad (4.1)$$

sendo $k = 1, 2, \dots, N$, N é o número de circuitos, i_k é a corrente elétrica no circuito k , t é o tempo, L representa a indutância e M a indutância mútua, $V_k(t)$ é a voltagem aplicada ao circuito k , $i_0(t) = 0$ e $i_{N+1}(t) = 0$. Estamos considerando que os dois indutores em série no mesmo circuito não sofrem indução mútua. Isto faz com que a indutância equivalente em cada circuito seja $L_e = L_1 + L_2 = 2L$.

A equação

$$M = \sqrt{L_1 L_2} \quad (4.2)$$

representa um limite que é imposto sobre a indutância mútua entre dois circuitos, ou seja, ela é sempre menor ou igual a raiz quadrada do produto das auto-indutâncias dos dois circuitos (Reitz, 1982). Em vista deste limite, frequentemente introduz-se um coeficiente de acoplamento ε , definido por

$$M = \varepsilon \sqrt{L_1 L_2}, \quad (4.3)$$

com $|\varepsilon| \leq 1$. Se a maior parte do fluxo de uma bobina atravessa a outra, o coeficiente de acoplamento é quase um. Se os circuitos estão afastados um do outro, de tal modo que pouco fluxo atravessa os circuitos, o coeficiente de acoplamento é quase zero. Como está sendo considerado $L_1 = L_2 = \dots = L_k = L$, a equação (4.3) torna-se $M = \varepsilon L$. Assim, substituindo esta equação de M em (4.1) temos

$$-\frac{\varepsilon}{2} \frac{di_{k-1}(t)}{dt} + \frac{di_k(t)}{dt} - \frac{\varepsilon}{2} \frac{di_{k+1}(t)}{dt} = -\frac{Ri_k(t)}{2L} + \frac{V_k(t)}{2L}. \quad (4.4)$$

Para $\varepsilon = 0$ e considerando $V(t) = V_0 \text{sen}(\omega t)$ temos a solução geral

$$i(t) = e^{-(R/2L)t} \left[\frac{V_0}{2L} \int e^{(R/2L)t} \text{sen}(\omega t) dt + c \right]. \quad (4.5)$$

Integrando por partes, obtemos

$$i(t) = \varphi e^{-(R/2L)t} + \frac{V_0}{R^2 + 4\omega^2 L^2} [R \text{sen}(\omega t) - 2\omega L \cos(\omega t)]. \quad (4.6)$$

que pode ser reescrito como

$$i(t) = \varphi e^{-(R/2L)t} + \frac{V_0}{\sqrt{R^2 + 4\omega^2 L^2}} \text{sen}(\omega t - \delta), \quad (4.7)$$

onde $\delta = \text{arctg} \frac{2\omega L}{R}$. A constante de integração φ , para o caso particular $i(0) = 0$, é fixa, que fornece a solução geral

$$i(t) = \frac{V_0}{\sqrt{R^2 + 4\omega^2 L^2}} [e^{-(R/2L)t} \text{sen} \delta + \text{sen}(\omega t - \delta)]. \quad (4.8)$$

O termo exponencial se aproxima de zero a medida que t tende para o infinito. Isto significa que, após um tempo suficientemente longo, a corrente $i(t)$ oscila de maneira praticamente harmônica, conforme é mostrado na figura (4.2) que foi obtida a partir da equação (4.8) e considerado $R = 0,02 \Omega$, $L = 0,1 \text{ H}$, $\delta = 1,37 \text{ rad.}$, $\omega = 0,49 \text{ Hz}$ e $V_0 = \sqrt{R^2 + 4\omega^2 L^2}$. Se $L = 0$ ocorre que $\delta = 0$ e as oscilações de $i(t)$ encontram-se em fase com as de $V(t)$.

Para ε diferente de zero o acoplamento ocorrerá desde que as correntes variem no tempo. Isto acontece porque o acoplamento indutivo não ocorre para correntes constantes, ou seja, não há variação de fluxo magnético entre os indutores. Sem variação no fluxo magnético não há corrente induzida e portanto não há acoplamento. Logo, como para V_k igual a uma constante o acoplamento só ocorre durante o transiente porque as correntes têm um comportamento exponencial com o decorrer do tempo. Consideraremos que $V_k(t)$ tenha um comportamento senoidal para que haja o acoplamento entre os circuitos para todo o instante de tempo, já que as correntes também oscilarão.

Agora adimensionalizaremos a equação (4.4) definindo duas grandezas adimensionais que são t' e i' , dadas por

$$t' = \frac{t}{\tau}, \quad (4.9)$$

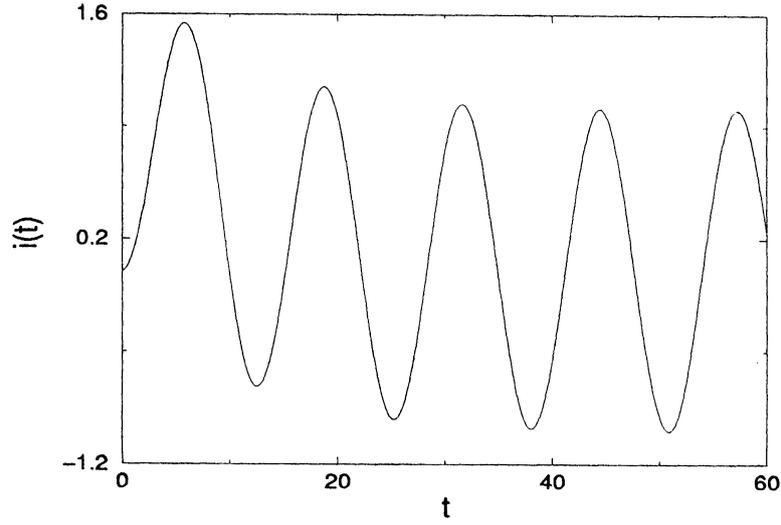


Figura 4.2: Corrente em um circuito RL usando a equação (4.8) e considerando $R = 0,02 \Omega$, $L = 0,1 \text{ H}$, $\delta = 1,37 \text{ rad.}$, $\omega = 0,49 \text{ Hz}$ e $V_0 = 0,064 \text{ V}$.

$$i' = \frac{i}{\mathcal{I}}, \quad (4.10)$$

sendo que τ é uma constante com unidade de tempo (tempo característico) e \mathcal{I} é uma constante com unidade de corrente elétrica para todo o sistema. Com estas grandezas adimensionais e usando a regra da cadeia,

$$\frac{di}{dt} = \frac{\mathcal{I}}{\tau} \frac{di'}{dt'}, \quad (4.11)$$

temos a equação (4.4) em uma forma adimensional

$$-\frac{\varepsilon}{2} \frac{di'_{k-1}(t')}{dt'} + \frac{di'_k(t')}{dt'} - \frac{\varepsilon}{2} \frac{di'_{k+1}(t')}{dt'} = -ai'_k + b_k, \quad (4.12)$$

com as grandezas adimensionais a e $b_k(t')$ definidas como

$$a = \frac{R\tau}{2L}, \quad (4.13)$$

$$b_k(t') = \frac{\tau V_k(t)}{2L\mathcal{I}}. \quad (4.14)$$

Para resolver as equações diferenciais ordinárias acopladas utilizaremos o método de Runge-Kutta de quarta ordem. Para aplicarmos o método de Runge-Kutta as equações diferenciais têm que estar na forma

$$\frac{dy_i(x)}{dx} = f_i(x, y_1, \dots, y_N), \quad (4.15)$$

com $i = 1, \dots, N$ e as funções do lado direito são conhecidas. Como nossas equações não estão na forma (4.15), em cada passo de integração temos que resolver o conjunto de equações algébricas lineares

$$\begin{aligned} \frac{di'_1}{dt} - \frac{1}{2} \frac{di'_2}{dt} &= -ai'_1 + b_1 \\ -\frac{1}{2} \frac{di'_1}{dt} + \frac{di'_2}{dt} - \frac{1}{2} \frac{di'_3}{dt} &= -ai'_2 + b_2 \\ -\frac{1}{2} \frac{di'_2}{dt} + \frac{di'_3}{dt} - \frac{1}{2} \frac{di'_4}{dt} &= -ai'_3 + b_3 \\ &\vdots = \vdots \\ -\frac{1}{2} \frac{di'_{N-1}}{dt} + \frac{di'_N}{dt} &= -ai'_N + b_N. \end{aligned} \quad (4.16)$$

O sistema linear de N equações e N incógnitas pode ser escrito, usando a seguinte notação matricial

$$\mathbf{M} \cdot \mathbf{d} = \mathbf{r}, \quad (4.17)$$

sendo que

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 & \dots \\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} & \dots \\ 0 & -\frac{1}{2} & \ddots & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & 1 \end{pmatrix}, \quad (4.18)$$

$$\mathbf{d} = \begin{pmatrix} di'_1/dt \\ di'_2/dt \\ \vdots \\ di'_N/dt \end{pmatrix}, \quad (4.19)$$

e

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} -ai'_1 + b_1 \\ -ai'_2 + b_2 \\ \vdots \\ -ai'_N + b_N \end{pmatrix}. \quad (4.20)$$

Nosso sistema não é homogêneo, desta forma ele possui uma única solução se a matriz dos coeficientes \mathbf{M} for não singular, ou seja, se o seu determinante for diferente de zero. Sendo assim, nós devemos calcular o determinante da matriz \mathbf{M} antes de calcularmos a solução do sistema.

A matriz \mathbf{M} é uma matriz tridiagonal, que possui todos os elementos nulos, exceto os pertencentes a diagonal principal, a subdiagonal e a superdiagonal. Para resolvermos o sistema linear onde temos uma matriz tridiagonal podemos usar a chamada decomposição LU: $\mathbf{M}=\mathbf{L}\cdot\mathbf{U}$, onde \mathbf{L} é a matriz triangular inferior e \mathbf{U} é a matriz triangular superior (Press, 1992). É suficiente considerar \mathbf{L} na forma

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} l_{1,1} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ l_{1,2} & l_{2,2} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & l_{3,2} & l_{3,3} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & l_{N,N-1} & l_{N,N} \end{pmatrix}, \quad (4.21)$$

com elementos não nulos ao longo da diagonal principal e ao longo da primeira subdiagonal, e \mathbf{U} na forma

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} 1 & u_{1,2} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & u_{2,3} & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & u_{N-1,N} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (4.22)$$

com valores unitários ao longo da diagonal principal e elementos não nulos ao longo da primeira superdiagonal.

Portanto, para o nosso caso de termos a matriz \mathbf{M} na forma tridiagonal, usamos a decomposição LU com substituição, que leva em torno de N operações, para obtermos as soluções do sistema linear $\mathbf{M}\cdot\mathbf{d} = \mathbf{r}$. Isto se faz necessário em cada

passo do Runge-Kutta para calcularmos os valores de i'_k das equações diferenciais acopladas dadas pelo sistema (4.16).

A figura (4.3) mostra a variação de $i'_k(t')$ com o tempo para uma rede com 6 circuitos utilizando a equação (4.12). Foi considerado $b_k(t') = B_k \text{sen}(\omega' t')$ e $\varepsilon = 0,83$, $a = 0,1$, $\omega' = 0,1$, $i'_k(0) = 0$, $B_1 = B_2 = B_4 = B_5 = B_6 = 0,1$ e $B_3 = 0,05$. Podemos ver pela figura que todos os circuitos apresentam um comportamento oscilatório para i' com amplitudes diferentes ocasionadas pelo acoplamento indutivo. Esta diferença entre as amplitudes é que utilizaremos como base para a formação das memórias.

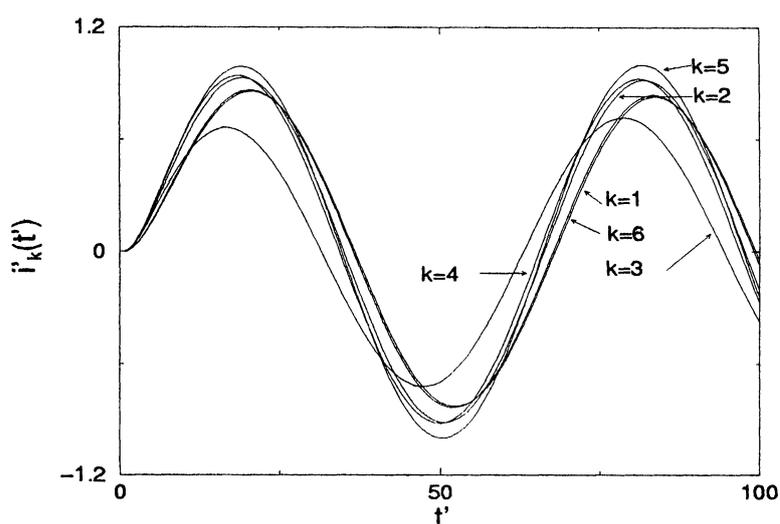


Figura 4.3: $i'_k(t')$ versus t' para uma rede com 6 circuitos acoplados indutivamente. Foi considerado $\varepsilon = 0,83$, $a = 0,1$, $\omega = 0,1$, $i'_k(0) = 0$, $B_1 = B_2 = B_4 = B_5 = B_6 = 0,1$ e $B_3 = 0,05$.

4.2 Modelo a tempo discreto

É possível por meio de (4.12) obter uma rede de mapas acoplados. Para fazermos isto utilizaremos a definição de derivada

$$\frac{di'_k(t')}{dt'} = \frac{i'^{(k)}_{n+1} - i'^{(k)}_n}{\Delta n}, \quad (4.23)$$

como $n = 1, 2, \dots$, temos $\Delta n = 1$. Substituindo na equação (4.12) e trocando $i'_k(t')$

por $i_n^{(k)}$, bem como $b_k(t')$ por $b_n^{(k)}$, obtemos

$$-\frac{\varepsilon}{2}i_{n+1}^{(k-1)} + i_{n+1}^{(k)} - \frac{\varepsilon}{2}i_{n+1}^{(k+1)} = (1-a)i_n^{(k)} + b_n^{(k)} - \frac{\varepsilon}{2}(i_n^{(k-1)} + i_n^{(k+1)}), \quad (4.24)$$

que é a equação que descreve uma rede de mapas acoplados para os circuitos RL acoplados através dos indutores, sendo $b_n^{(k)} = B^{(k)}\text{sen}(\omega'n)$. A equação (4.24) fornece os mesmos resultados que a equação (4.12) para a rede de equações diferenciais acopladas desde que tenhamos $\omega' < 1$. ω' dá a frequência de oscilação de i' , e deve ser menor que 1 para que o período seja maior que Δn e os resultados fornecidos pela rede de mapas acoplados sejam iguais aos da rede de equações diferenciais. O motivo de discretizarmos a rede de equações diferenciais é para podermos obter uma lei de controle para a formação de memórias. Apesar de não precisarmos de um integrador numérico para obtermos os valores de $i^{(k)}$, precisamos resolver um sistema de equações a cada iteração. O método usado para resolver o sistema é o mesmo utilizado nas equações diferenciais, já que a matriz M continua sendo tridiagonal.

4.3 Memórias de curto período

Nesta seção analisaremos a formação de memórias utilizando o modelo a tempo contínuo (4.12). Para isto teremos que definir uma variável de curvatura, como foi feito nos trabalhos anteriores (Coppersmith, 1997) (Batista, 2000). Como a grandeza i' oscila com t' e a amplitude difere entre as oscilações dos circuitos, definiremos a variável de curvatura $c_k(t')$ da seguinte forma

$$c_k(t') = \max \left\{ i'_k(t') - \frac{\varepsilon}{2}[i'_{k-1}(t') + i'_{k+1}(t')] \right\}, \quad (4.25)$$

sendo que o valor máximo é considerado sobre um ciclo. A formação de memória ocorre quando a variável de curvatura apresenta um valor constante. Como exemplo, calculamos a variável de curvatura para uma rede com 6 circuitos, como mostra a figura (4.4), na qual consideramos $i'_0(t') = 0$, $i'_{N+1}(t') = 0$, $i'_k(0) = 0$, $\varepsilon = 0,83$, $a = 0,1$, $\omega' = 0,1$, $B_1 = B_2 = B_4 = B_5 = B_6 = 0,6$ e $B_3 = 0,3$. Após um transiente os valores de $c_k(t')$ tornam-se constantes e este exemplo mostra seis valores constantes, ou seja, seis memórias produzidas pelas perturbações externas B_k . Se considerarmos outros valores para B_k teremos outras memórias que persistem somente se a perturbação externa B_k é continuamente aplicada no sistema.

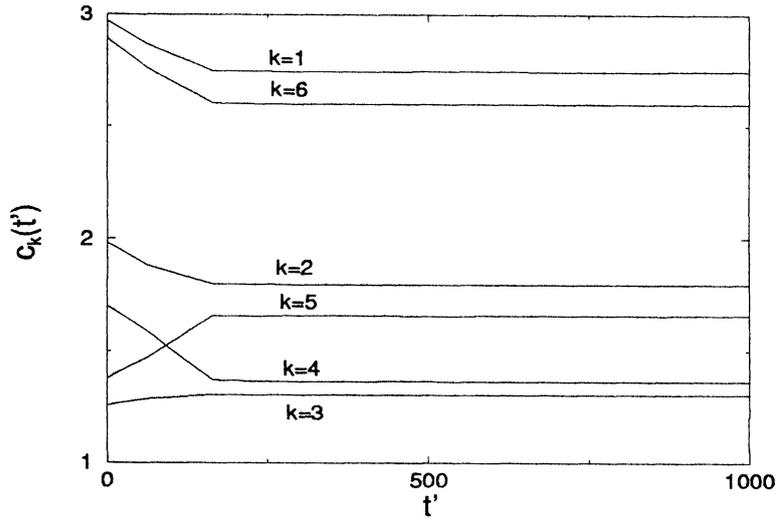


Figura 4.4: Cálculo da variável da curvatura $c_k(t')$ para $i'_0(t') = 0$, $i'_{N+1}(t') = 0$, $i'_k(0) = 0$, $\varepsilon = 0,83$, $a = 0,1$, $\omega' = 0,1$, $B_1 = B_2 = B_4 = B_5 = B_6 = 0,6$ e $B_3 = 0,3$.

Na figura (4.4) todas as perturbações externas são iguais com exceção de uma, que escolhemos ser a B_3 . Portanto, variando apenas uma das perturbações podemos obter diferentes configurações de memórias. A figura (4.5) mostra as memórias que podemos obter variando apenas B_3 no intervalo de 0,3 a 0,9 e fixando as demais perturbações em 0,6.

O fato de termos várias memórias sugere que por meio desta rede podemos armazenar informações mais complexas. Usamos uma sequência de células formando uma matriz 3×2 , conforme figura (4.6), onde a cada uma das 6 células damos um intervalo de valores da variável de curvatura. Quando uma variável de curvatura, de um determinado sítio, apresenta um valor compreendido no intervalo de uma das células esta célula é hachurada. Em seguida, sobrepomos todas as matrizes de células para formar um padrão, o que requer ao menos 6 sítios para termos todas as combinações possíveis. Após um transiente teremos um padrão formado por células hachuradas e não hachuradas. Para formar padrões seguiremos o método Braille, o qual escolhemos por possibilitar o armazenamento de todas as letras do alfabeto, bem como os símbolos de pontuação e os números, em uma matriz 3×2 .

O sistema Braille é um método tátil universalmente usado para escrita de deficientes visuais. Foi inventado por Louis Braille e emprega grupos de pontos para representar letras impressas e números. O sistema é constituído pelas chamadas células Braille, que são formadas por seis pontos agrupados em duas colunas verticais de três pontos cada. Para cada célula básica podem ser formados 63 padrões diferentes. Esses padrões, facilmente identificados pelo toque, representam

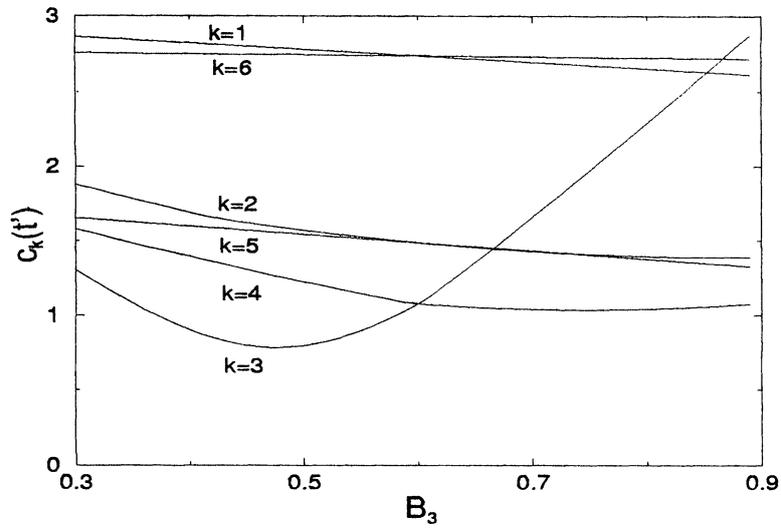


Figura 4.5: Cálculo da variável da curvatura $c_k(t')$ variando B_3 entre 0,3 a 0,9. Foi considerado $i'_0(t') = 0$, $i'_{N+1}(t') = 0$, $i'_k(0) = 0$, $\varepsilon = 0,83$, $a = 0,1$, $\omega' = 0,1$ e $B_1 = B_2 = B_4 = B_5 = B_6 = 0,6$.

[2,3[[5,6]
[1,2[[4,5[
[0,1[[3,4[

Figura 4.6: Matriz gráfica 3×2 , onde cada célula representa um intervalo dos valores da variável de curvatura $c_k(t')$.

letras do alfabeto, números, sinais de pontuação e umas poucas palavras comuns. Uma típica página Braille contém 40 caracteres Braille por linha e 25 linhas. Como há somente 63 símbolos Braille, muitos têm mais do que um significado, dependendo de sua colocação na palavra ou sentença.

A figura (4.7) mostra símbolos Braille para algumas letras do alfabeto. Também mostra valores das perturbações externas B_k que fornecem os padrões em Braille através da figura (4.6). Nós obtivemos os valores de B_k que fornecem todas as letras do alfabeto e os símbolos de pontuação (fig. 4.8). Existem diferentes combinações de valores de B_k que podem fornecer o mesmo padrão para um símbolo. Para conseguir escolher o valor de B_k necessário devemos usar uma rede de mapas acoplados, o que faremos a seguir.

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	B_6
A 	1.6	1.0	0.0	2.5	2.5	0.0
B 	0.6	0.6	0.3	0.6	0.6	0.6
C 	1.5	0.0	1.5	0.0	1.5	0.0
D 	1.5	1.7	1.5	2.0	2.0	1.5
E 	1.0	1.0	1.0	0.5	2.0	2.0
F 	0.3	0.0	0.3	0.3	0.0	0.8
G 	0.0	0.8	0.0	0.3	0.0	0.7
H 	0.6	0.6	0.6	0.0	0.0	0.6
I 	2.5	1.0	2.0	1.9	0.8	0.5
J 	1.6	1.0	0.5	2.5	1.5	0.0
K 	0.0	0.1	0.5	0.0	0.5	0.5
L 	0.3	0.6	0.3	0.6	0.6	0.6
M 	0.8	0.0	0.3	0.3	0.0	0.8
N 	0.0	0.1	0.5	0.0	2.2	0.0
O 	0.1	0.2	0.0	1.0	0.0	1.0
P 	0.3	0.3	0.3	0.3	0.0	0.8
Q 	0.2	0.0	0.0	0.0	1.0	1.0
R 	0.0	0.3	0.0	0.3	0.0	0.7
S 	0.3	0.3	0.3	0.0	0.0	0.8
T 	0.0	0.6	1.6	1.0	2.5	1.5
U 	0.6	0.3	0.3	0.3	0.6	0.6
V 	0.6	0.3	0.3	0.6	0.6	0.6
W 	3.0	1.5	2.0	1.5	1.2	0.2
X 	0.0	0.5	0.0	1.5	0.0	1.5
Y 	0.1	0.0	0.4	0.0	1.0	1.0
Z 	0.8	0.8	0.0	0.9	0.8	0.3

Figura 4.7: Exemplos de algumas letras com suas respectivas codificações em Braille. Também são mostrados os valores das perturbações externas B_k para a obtenção dos símbolos.

	B ₁	B ₂	B ₃	B ₄	B ₅	B ₆
letra maiúscula	0.0	2.0	0.0	0.5	2.5	1.0
ponto	2.0	1.5	1.0	0.5	0.2	1.5
vírgula	0.0	0.5	1.5	0.1	2.0	1.5
hifen	0.6	0.3	0.3	0.3	0.3	0.6
apóstrofe	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1
número	0.0	0.1	0.6	0.0	1.0	1.0
interrogação	0.6	0.3	0.3	0.3	0.3	0.3
exclamação	2.0	1.5	1.0	0.5	0.2	0.0

Figura 4.8: Exemplos de alguns símbolos de pontuação com suas respectivas codificações em Braille. Também são mostrados os valores das perturbações externas B_k para a obtenção dos símbolos.

4.4 Memórias em rede de mapas acoplados

Vamos analisar a formação de memórias usando a rede de mapas acoplados dada pela equação (4.24). Esta equação foi obtida utilizando a rede de circuitos acoplados indutivamente, com a condição de que ω' seja menor do que 1 para termos resultados equivalentes. Discretizamos a rede de equações diferenciais para podermos obter uma equação que permita calcular os valores das perturbações externas B_k que forneçam um padrão pré-determinado.

Para a obtenção de uma equação de controle definiremos a variável de curvatura $c_n^{(k)}$ para o sistema discretizado, dada por

$$c_n^{(k)} = \max \left\{ i_n^{(k)} - \frac{\varepsilon}{2} [i_n^{(k-1)} + i_n^{(k+1)}] \right\}, \quad (4.26)$$

que é definida desta forma para facilitar os cálculos. O que nos interessa é o valor de c após um transiente, que corresponde a memória que queremos armazenar de acordo com os intervalos da figura (4.6). Usando as equações (4.24) e (4.26) encontramos

$$B_n^{(k)} = \operatorname{cosec}(\omega'n) \left\{ C^{(k)} \operatorname{sen}[\omega'(n+1)] + (a-1)i_n^{(k)} + \frac{\varepsilon}{2}(i_n^{(k-1)} + i_n^{(k+1)}) \right\}, \quad (4.27)$$

desde que $\operatorname{sen}\omega'n \neq 0$, isto é, $\omega'n \neq z_0\pi$ ($z_0 \in \mathcal{Z}$). sendo que $C^{(k)}$ são os valores que queremos atingir das variáveis de curvatura, ou seja, são os alvos. A equação (4.27)

fornece os valores das perturbações externas $B^{(k)}$ que devemos aplicar em cada sítio, com o decorrer das iterações, para termos um padrão desejado. É escolhido os valores dos alvos da variável de curvatura, de tal forma que os valores de $C^{(k)}$ estejam nos intervalos de valores das células que queremos que sejam hachuradas, e em seguida calculamos as perturbações por meio da equação (4.27).

Para exemplificar vamos pegar a letra W, cujo símbolo em Braille está mostrado na figura (4.7). Para hachurar as células que formam a letra W vamos considerar uma rede com 6 sítios e os seguintes alvos: $C^{(1)} = 1,0$, $C^{(2)} = 3,0$, $C^{(3)} = 4,0$, $C^{(4)} = 5,0$, $C^{(5)} = 6,0$ e $C^{(6)} = 6,0$. Também consideramos $\varepsilon = 0,83$, $a = 0,1$, $\omega' = 0,1$, $i_n^{(0)} = 0$, $i_n^{(N+1)} = 0$ e $i_0^{(k)} = 0$. Substituindo os valores de $C^{(k)}$ na equação (4.27) encontramos os valores de $B_n^{(k)}$ que fornecem o símbolo W. A figura (4.9) exhibe o comportamento de uma das perturbações, que escolhemos ser $B_n^{(3)}$. Mas todas as perturbações têm o mesmo comportamento, com exceção das amplitudes que variam de uma perturbação para outra. Portanto, podemos obter qualquer padrão desejado usando a equação (4.27) que fornece as perturbações que devemos aplicar no sistema (Batista, 2001 b).

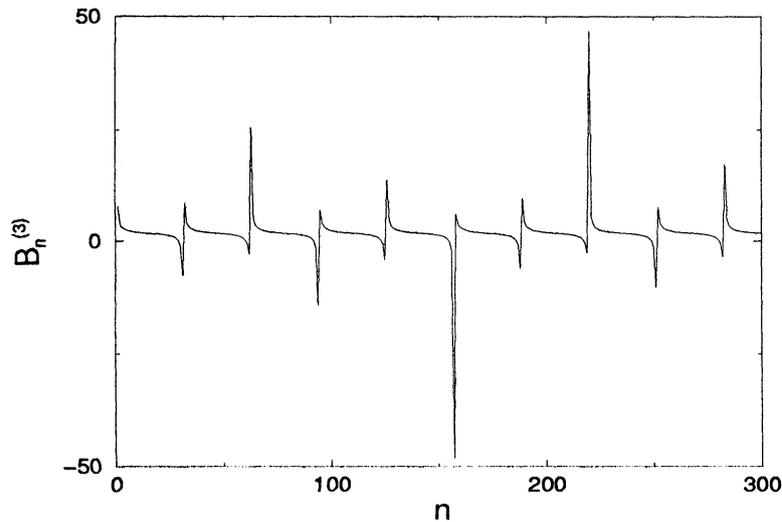


Figura 4.9: Cálculo de $B_n^{(3)}$ usando $N = 6$, $\varepsilon = 0,83$, $a = 0,1$ e $\omega = 0,1$.

4.5 O efeito de ruído

O efeito de ruído deve ser analisado quando se tem em mente a implementação em laboratório de osciladores elétricos acoplados. Em particular, um ruído pode ser adicionado em determinados valores dos parâmetros que caracterizam os circuitos,

como resistências, indutâncias e força eletromotriz. Assim, analisamos o efeito de ruído na capacidade de armazenar memória do nosso sistema, inserindo um ruído em cada um dos parâmetros dos circuitos, como por exemplo

$$a_n^{(k)} = a \pm \delta_1 r_{n,k}, \quad (4.28)$$

onde a é o parâmetro dado pela equação (4.13), $\delta_1 > 0$ é o nível do ruído e $r_{n,k}$ são valores distribuídos aleatoriamente no intervalo $[0, 1]$. Na figura (4.10) calculamos os valores estacionários das variáveis de curvatura versus o nível de ruído δ_1 no parâmetro a . Vemos que quando o nível do ruído aumenta os valores estacionários das variáveis de curvatura tornam-se distribuídos sobre um determinado intervalo que vai aumentando com o ruído.

Uma possível fonte de problemas é quando o valor da variável de curvatura sai do intervalo desejado. Este problema pode ser contornado definindo outro intervalo para o padrão desejado. A maior dificuldade é quando ocorre a sobreposição de duas regiões, o que faz com que as variáveis de curvaturas tornem-se indistinguíveis. No caso da figura (4.10) isto ocorre para um nível de ruído em torno de 0,4%, que pode ser considerado como o limite da aplicação do nosso esquema de codificação, para esta partição da variável de curvatura, em particular.

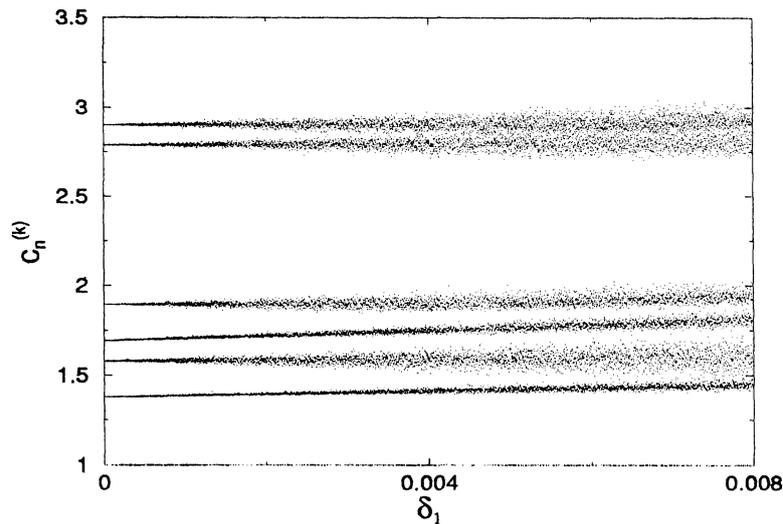


Figura 4.10: Valores estacionários das variáveis de curvatura versus o nível de ruído no parâmetro a do circuito.

Também incluímos ruído nas amplitudes das perturbações externas

$$B_n^{(k)} = B^{(k)} \pm \delta_2 r_{r,k}, \quad (4.29)$$

onde $B^{(k)}$ são as amplitudes das perturbações usadas na figura (4.4). Uma questão que permanece sobre a sobreposição das variáveis de curvatura é a de que até qual valor podemos estender ambos os níveis de ruído e ainda termos bons resultados. Uma análise detalhada desta questão seria complicada já que a sobreposição dos intervalos varia com muitos parâmetros, incluindo os valores das variáveis de curvatura.

Um caminho simples para dar alguma idéia sobre este efeito é considerar os dois níveis de ruído (δ_1 , δ_2) e verificar a diferença entre os valores das variáveis de curvatura com os ruídos e sem os ruídos. Na figura (4.11) usamos pontos para denotar, no gráfico dos níveis de ruído, os valores de δ_1 e δ_2 para que $|c^{(k)} - c^{(k)}(\delta_1 = \delta_2 = 0)| \geq 0,01$, para um dado sítio k (são considerados valores estacionários para todos os sítios da rede). Isto fornece apenas uma idéia de como os níveis de ruído podem afetar o esquema de codificação sobre uma dada tolerância. A distribuição dos pontos aumenta para valores altos de ruído e não tem simetria. O nível de ruído em B é quase uma ordem de grandeza maior que o nível de ruído em a . Logo, a rede acoplada parece ser mais robusta para ruído na perturbação externa do que em seus parâmetros.

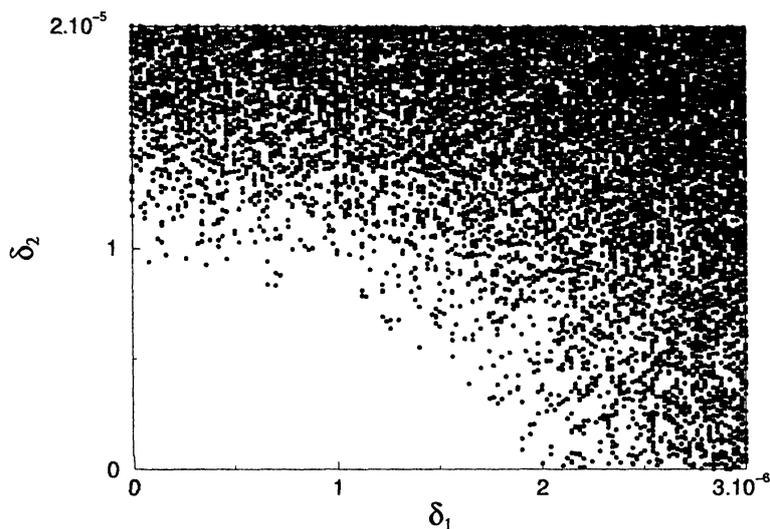


Figura 4.11: Os pontos indicam os pares dos níveis de ruídos que fazem com que a variável de curvatura passe a apresentar uma diferença maior do que 0,01 do seu valor sem ruído.

Capítulo 5

Espectro de Lyapunov em Redes de Mapas Logísticos Acoplados

5.1 Expoentes de Lyapunov para mapas

No regime caótico um mapa unidimensional apresenta sensibilidade às condições iniciais, portanto duas condições iniciais originalmente próximas geram trajetórias que divergem exponencialmente com o tempo. O expoente de Lyapunov mede esta separação exponencial (fig. 5.1).

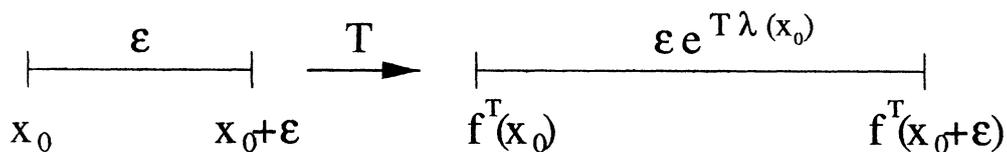


Figura 5.1: Separação exponencial de duas condições iniciais próximas, onde T é o número de iterações.

Da figura (5.1) obtemos:

$$\epsilon e^{T \lambda(x_0)} = |f^T(x_0 + \epsilon) - f^T(x_0)|, \quad (5.1)$$

que, no limite $\epsilon \rightarrow 0$ e $T \rightarrow \infty$, guia-nos para a expressão de $\lambda(x_0)$:

$$\lambda(x_0) = \lim_{T \rightarrow \infty} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{T} \ln \left| \frac{f^T(x_0 + \varepsilon) - f^T(x_0)}{\varepsilon} \right| = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \ln \left| \frac{df^T(x_0)}{dx_0} \right|. \quad (5.2)$$

Isto significa que $e^{\lambda(x_0)}$ é o fator médio pelo qual a distância entre os pontos adjacentes próximos varia após um número grande de iterações.

Usando em (5.2) a regra da cadeia temos

$$\left. \frac{df^2(x)}{dx} \right|_{x_0} = \left. \frac{df[f(x)]}{dx} \right|_{x_0} = f'[f(x_0)]f'(x_0) = f'(x_1)f'(x_0), \quad (5.3)$$

onde $x_1 = f(x_0)$, logo o expoente de Lyapunov toma a forma

$$\lambda(x_0) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \ln \left| \prod_{i=0}^{T-1} f'(x_i) \right| \quad (5.4)$$

ou seja

$$\lambda(x_0) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \sum_{i=1}^{T-1} \ln |f'(x_i)|. \quad (5.5)$$

Se $\lambda(x_0) > 0$ o sistema apresenta um regime caótico, para $\lambda(x_0) < 0$ o regime é regular e se $\lambda(x_0) = 0$ é quase periódico. A figura (5.2) mostra os expoentes de Lyapunov, calculados usando a equação (5.5) e o mapa logístico $x_{n+1} = f(x) = 1 - rx_n^2$, variando o parâmetro r . No regime de bifurcações para $1 < r < r_\infty$ (r_∞ é o ponto de acumulação), o expoente de Lyapunov é sempre negativo, com exceções dos pontos de bifurcações onde o expoente de Lyapunov é nulo. No intervalo $r_\infty < r \leq 2$ o expoente de Lyapunov é predominantemente positivo, sendo interrompido por *janelas* com $\lambda < 0$ onde temos regimes periódicos.

5.2 Espectro de Lyapunov

Uma rede com N mapas unidimensionais acoplados é um sistema dinâmico discreto N -dimensional: $x_n^{(i)} = \mathcal{F}_i(x_n^{(1)}, \dots, x_n^{(N)})$, ($i = 1, \dots, N$). O correspondente espectro

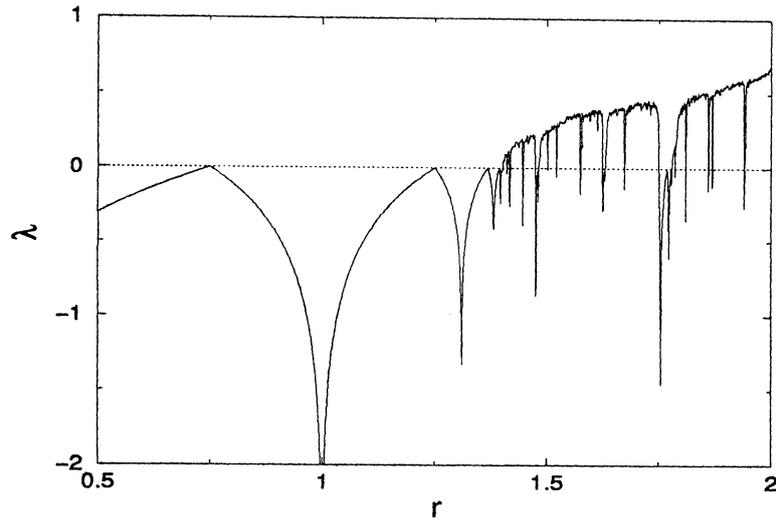


Figura 5.2: Expoente de Lyapunov para o mapa logístico $x_{n+1} = 1 - rx_n^2$.

de Lyapunov é formado por N expoentes, um para cada direção independente \mathbf{u}_i no espaço tangente: $\lambda_1 = \lambda_{max} > \lambda_2 > \dots > \lambda_N$. O expoente de Lyapunov correspondente a direção \mathbf{u}_i é dado por

$$\lambda_i = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \ln \|\mathbf{A}_T \cdot \mathbf{u}_i\|, \quad (5.6)$$

onde

$$\mathbf{A}_T = \prod_{l=1}^T \mathbf{J}_l, \quad (5.7)$$

com

$$[\mathbf{J}_l]_{ij} = \frac{\partial \mathcal{F}_i}{\partial x_l^{(j)}}. \quad (5.8)$$

Em uma rede de mapas acoplados difusamente, considerando o acoplamento laplaciano local dado pela relação

$$x_{n+1}^{(i)} = (1 - \varepsilon)f(x_n^{(i)}) + \frac{\varepsilon}{2}[f(x_n^{(i-1)}) + f(x_n^{(i+1)})], \quad (5.9)$$

onde $f(x)$ descreve a dinâmica do mapa isolado, cada matriz Jacobiana J_n é dada pelo produto da matriz difusão

$$D_{i,j} = (1 - \varepsilon)\delta_{i,j} + \frac{\varepsilon}{2}(\delta_{i,j+1} + \delta_{i,j-1}), \quad (5.10)$$

pela matriz diagonal

$$f'(x_n^{(i)})\delta_{i,j}. \quad (5.11)$$

Logo, a Jacobiana toma a seguinte forma matricial

$$J_n = D_{i,j}f'(x_n^{(i)})\delta_{i,j}, \quad (5.12)$$

$$J_n = \begin{pmatrix} (1 - \varepsilon)f'(x_n^{(1)}) & \varepsilon/2f'(x_n^{(2)}) & 0 & \dots & \\ \varepsilon/2f'(x_n^{(1)}) & (1 - \varepsilon)f'(x_n^{(2)}) & \varepsilon/2f'(x_n^{(3)}) & \dots & \\ 0 & \varepsilon/2f'(x_n^{(2)}) & \ddots & \dots & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & (1 - \varepsilon)f'(x_n^{(N)}) \end{pmatrix}, \quad (5.13)$$

onde N denota o tamanho da rede de mapas acoplados.

O produto das Jacobianas fornece uma matriz não simétrica. Devido a não simetria, usaremos a redução a forma superior de Hessenberg para calcularmos os autovalores (Press, 1992).

A sensibilidade nos cálculos dos autovalores a erros numéricos durante a execução dos algoritmos pode ser reduzida pelo procedimento chamado de balanceamento. Os erros encontrados pelos procedimentos numéricos são, geralmente, proporcionais à norma Euclidiana da matriz, que é a raiz quadrada da soma dos quadrados dos elementos da matriz. A idéia do balanceamento consiste em usar uma transformação de similaridade para fazer com que as correspondentes linhas e colunas da matriz tenham normas comparáveis, assim reduzindo a norma total da

matriz, enquanto deixa os autovalores inalterados. Uma matriz simétrica já é balanceada. O balanceamento é um procedimento que leva da ordem de N^2 operações. Como o balanceamento leva mais do que uma pouca porcentagem do tempo total necessário para calcular os autovalores, é recomendado sempre usar o balanceamento para matrizes não simétricas, que é o que nós faremos.

Após o balanceamento reduzimos a matriz Jacobiana à forma superior de Hessenberg, que tem zeros abaixo da diagonal, exceto para a primeira linha subdiagonal. Por exemplo, na matriz 6×6 , os elementos diferentes de zero são

$$\begin{pmatrix} X & X & X & X & X & X \\ X & X & X & X & X & X \\ & X & X & X & X & X \\ & & X & X & X & X \\ & & & X & X & X \\ & & & & X & X \end{pmatrix}. \quad (5.14)$$

Para a redução, é usado um procedimento análogo à eliminação Gaussiana com pivoteamento.

Com a matriz na forma de Hessenberg calculamos os autovalores por meio de uma transformação $\mathbf{J}=\mathbf{Q}\cdot\mathbf{R}$, onde \mathbf{Q} é uma matriz ortogonal e \mathbf{R} é uma matriz triangular superior.

Para a análise do espectro de Lyapunov de uma rede de mapas acoplados, utilizaremos o mapa logístico, que é dado por $x_{n+1} = 1 - rx_n^2$, sendo que r é o parâmetro de controle. Com a variação da não linearidade r e do parâmetro de acoplamento ε , observam-se alterações no espectro de Lyapunov. Estas alterações ocorrem devido a modificações nos padrões dinâmicos da rede (Kaneko, 1989 a).

Quando todos os sítios apresentam comportamento regular o espectro de Lyapunov não apresenta nenhum valor positivo, como podemos ver na figura (5.3a), que mostra uma rede sem nenhum domínio caótico e seu correspondente espectro de Lyapunov. No padrão randômico aleatório congelado ocorre que os *kinks* ficam fixos com o decorrer das iterações, fazendo com que não hajam alterações nos domínios. Nesta forma de padrão o espectro de Lyapunov apresenta alguns valores positivos devido a existência de domínios com comportamento caótico (fig. 5.3b).

A figura (5.4a) mostra o padrão espacial e o espectro de Lyapunov para o caso onde temos a supressão de caos. Quando os mapas estão desacoplados ($\varepsilon = 0$) eles apresentam um comportamento caótico, mas quando acoplados ocorre a supressão de caos com a seleção de padrões para determinados valores de r e ε .

Depois da seleção, a posição dos domínios é congelada, ou seja, não se movem no espaço, e os tamanhos dos domínios são selecionados tal que a dinâmica do sistema seja menos caótica. No padrão aleatório congelado o caos é suprimido com a seleção de domínios de tamanho pequeno e o espectro de Lyapunov apresenta valores nulos ou próximos de zero. No caso da rede apresentar caos espaço temporal, o espectro de Lyapunov, além de apresentar valores positivos, exibe uma forma de decaimento suave, como mostra a figura (5.4b).

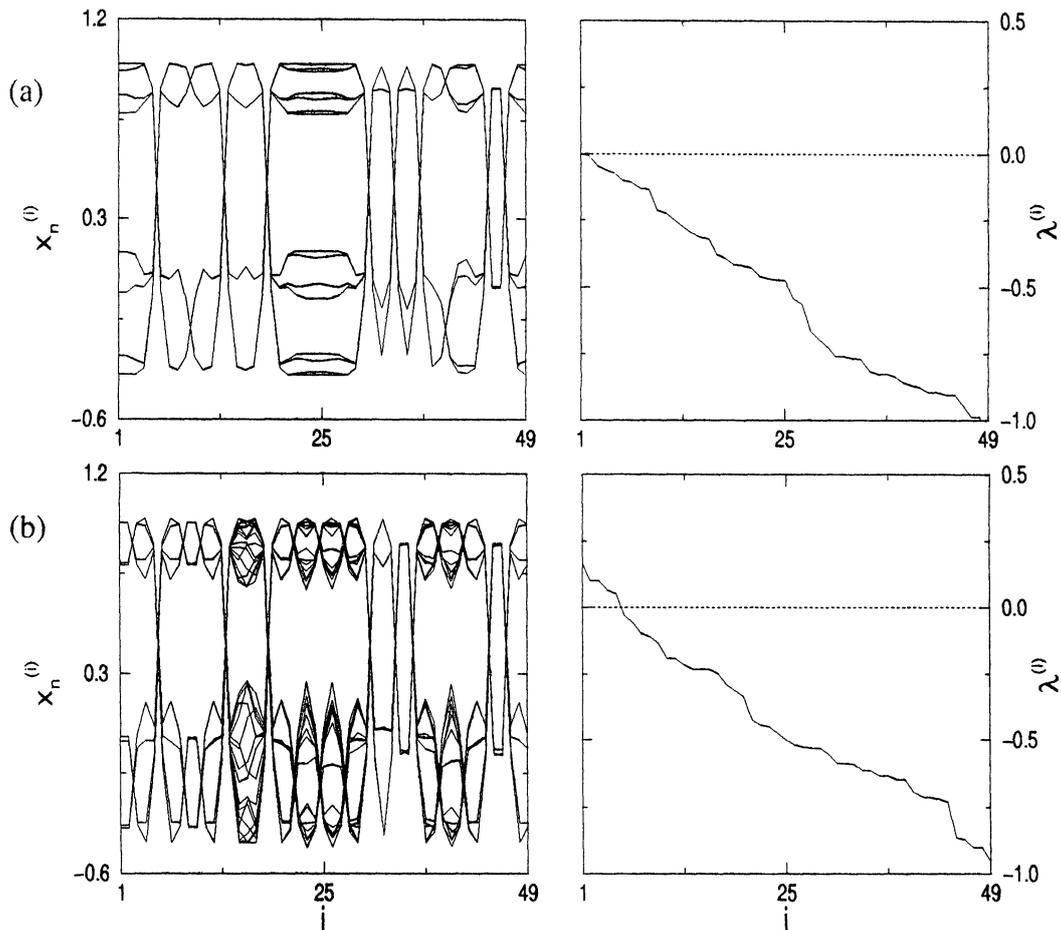


Figura 5.3: Padrão espacial e espectro de Lyapunov para o padrão aleatório congelado, onde temos a situação com todos os domínios regulares a) $r = 1, 4$ e $\varepsilon = 0, 2$, e com alguns domínios caóticos b) $r = 1, 5$ e $\varepsilon = 0, 2$. Foram consideradas condições iniciais aleatórias, condições de contorno periódicas e realizadas 2050 iterações sendo tomadas apenas as 50 últimas iterações.

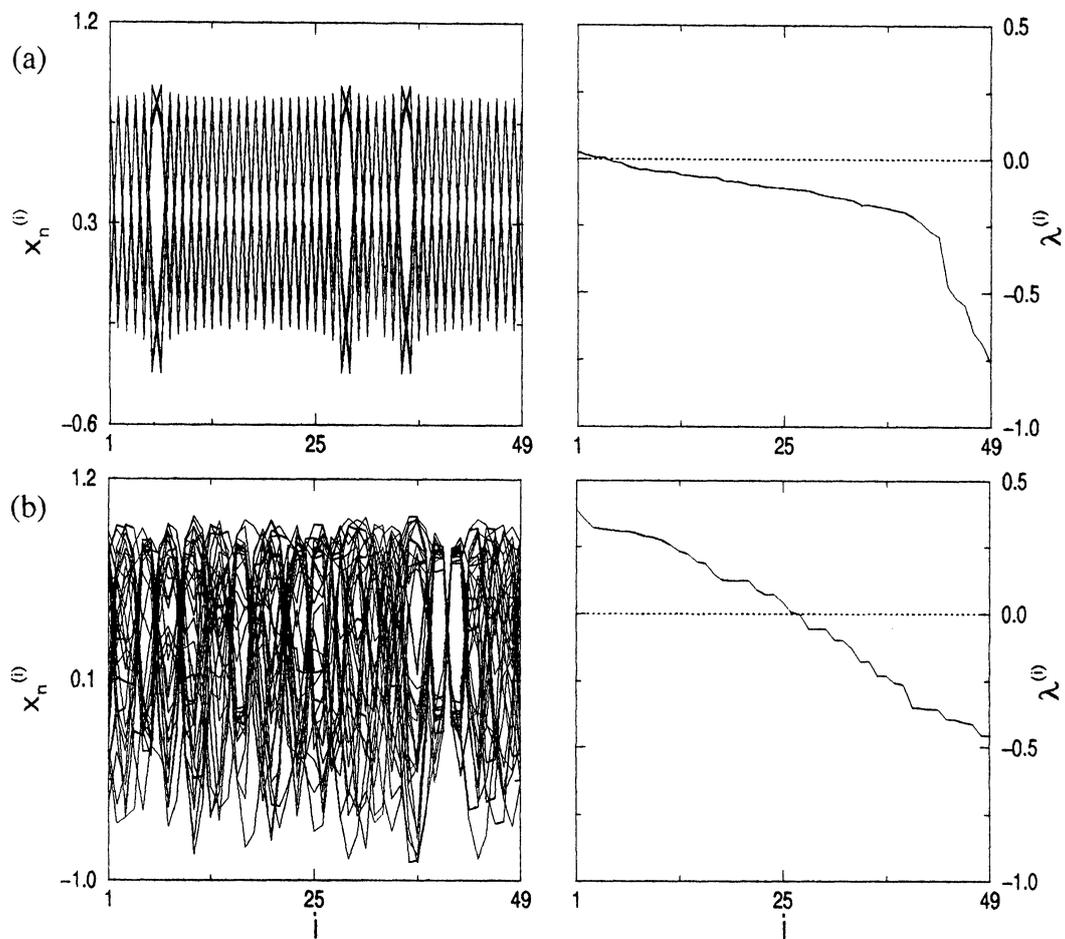


Figura 5.4: Padrão espacial e espectro de Lyapunov para o caso de supressão de caos com seleção de padrões a) $r = 1,72$ e $\varepsilon = 0,1$, e para caos espaço temporal b) $r = 2,0$ e $\varepsilon = 0,3$. Foram consideradas condições iniciais aleatórias, condições de contorno periódicas e realizadas 2050 iterações sendo tomadas apenas as 50 últimas iterações.

5.3 Espectro de Lyapunov para o acoplamento do tipo potência

Utilizaremos o acoplamento (2.29) que para $\alpha = 0$ torna-se o acoplamento global do tipo *campo médio*, e para $\alpha \rightarrow \infty$ temos o acoplamento local.

Para o cálculo do espectro de Lyapunov, utilizando o acoplamento (2.29), precisamos obter a Jacobiana que apresenta a seguinte forma matricial

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial x_{n+1}^{(1)}}{\partial x^{(1)}} & \frac{\partial x_{n+1}^{(1)}}{\partial x^{(2)}} & \frac{\partial x_{n+1}^{(1)}}{\partial x^{(3)}} & \dots \\ \frac{\partial x_{n+1}^{(2)}}{\partial x^{(1)}} & \frac{\partial x_{n+1}^{(2)}}{\partial x^{(2)}} & \frac{\partial x_{n+1}^{(2)}}{\partial x^{(3)}} & \dots \\ \frac{\partial x_{n+1}^{(3)}}{\partial x^{(1)}} & \frac{\partial x_{n+1}^{(3)}}{\partial x^{(2)}} & \frac{\partial x_{n+1}^{(3)}}{\partial x^{(3)}} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}. \quad (5.15)$$

Assim, para obtermos a Jacobiana devemos calcular todos os elementos da matriz (5.15), que denotaremos por

$$\frac{\partial x_{n+1}^{(i)}}{\partial x^{(k)}}, \quad (5.16)$$

sendo que pela equação (2.29), temos

$$\frac{\partial x_{n+1}^{(i)}}{\partial x^{(k)}} = \frac{\partial f(x_n^{(i)})}{\partial x^{(k)}} + \frac{\varepsilon}{\eta} \sum_{j=1}^{N'} \frac{1}{j^\alpha} \left[\frac{\partial f(x_n^{(i+j)})}{\partial x^{(k)}} - 2 \frac{\partial f(x_n^{(i)})}{\partial x^{(k)}} + \frac{\partial f(x_n^{(i-j)})}{\partial x^{(k)}} \right]. \quad (5.17)$$

Para exemplificar, vamos calcular a Jacobiana para uma rede de 5 sítios usando a equação acima, onde $N' = 2$

$$\begin{aligned} \frac{\partial x_{n+1}^{(i)}}{\partial x^{(k)}} &= \frac{\partial f(x_n^{(i)})}{\partial x^{(k)}} + \frac{\varepsilon}{\eta 1^\alpha} \left(\frac{\partial f(x_n^{(i+1)})}{\partial x^{(k)}} - 2 \frac{\partial f(x_n^{(i)})}{\partial x^{(k)}} + \frac{\partial f(x_n^{(i-1)})}{\partial x^{(k)}} \right) \\ &\quad + \frac{\varepsilon}{\eta 2^\alpha} \left(\frac{\partial f(x_n^{(i+2)})}{\partial x^{(k)}} - 2 \frac{\partial f(x_n^{(i)})}{\partial x^{(k)}} + \frac{\partial f(x_n^{(i-2)})}{\partial x^{(k)}} \right), \end{aligned} \quad (5.18)$$

assim, usando a equação (5.18), e não esquecendo que estamos usando condições de contorno periódicas, a Jacobiana apresenta a seguinte forma

$$J = \begin{pmatrix} (1 - \varepsilon)f'(1) & \varepsilon_1 f'(2) & \varepsilon_2 f'(3) & \varepsilon_2 f'(4) & \varepsilon_1 f'(5) \\ \varepsilon_1 f'(1) & (1 - \varepsilon)f'(2) & \varepsilon_1 f'(3) & \varepsilon_2 f'(4) & \varepsilon_2 f'(5) \\ \varepsilon_2 f'(1) & \varepsilon_1 f'(2) & (1 - \varepsilon)f'(3) & \varepsilon_1 f'(4) & \varepsilon_2 f'(5) \\ \varepsilon_2 f'(1) & \varepsilon_2 f'(2) & \varepsilon_1 f'(3) & (1 - \varepsilon)f'(4) & \varepsilon_1 f'(5) \\ \varepsilon_1 f'(1) & \varepsilon_2 f'(2) & \varepsilon_2 f'(3) & \varepsilon_1 f'(4) & (1 - \varepsilon)f'(5) \end{pmatrix}, \quad (5.19)$$

sendo

$$\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{\eta 1^\alpha} \quad (5.20)$$

e

$$\varepsilon_2 = \frac{\varepsilon}{\eta 2^\alpha}. \quad (5.21)$$

Desta forma obtemos uma relação que fornece todos os elementos matriciais da Jacobiana para uma rede com N sítios

$$\frac{\partial x_{n+1}^{(i)}}{\partial x^{(k)}} = \begin{cases} (1 - \varepsilon)f'(x^{(k)}) & \text{se } k = i \\ \varepsilon |i - k|^{-\alpha} f'(x^{(k)})/\eta & \text{se } |i - k| \leq N' \\ \varepsilon (N - |i - k|)^{-\alpha} f'(x^{(k)})/\eta & \text{se } |i - k| > N', \end{cases} \quad (5.22)$$

sendo que com a Jacobiana obtemos o espectro de Lyapunov.

Para $\alpha = 0$, o acoplamento dado pela equação (2.29) fornece o acoplamento global da forma

$$x_{n+1}^{(i)} = (1 - \varepsilon)f(x_n^{(i)}) + \frac{\varepsilon}{N - 1} \sum_{j=1, j \neq i}^N f(x_n^{(j)}), \quad (5.23)$$

que no caso de termos um atrator onde $x_n^{(i)} = x_n^{(j)}$ para todo i e j , o movimento é governado por um simples mapa $x_{n+1} = f(x_n)$ e temos que

$$\frac{\varepsilon}{N - 1} \sum_{j=1, j \neq i}^N f(x_n^{(j)}) = \frac{\varepsilon}{N} \sum_{j=1}^N f(x_n^{(j)}), \quad (5.24)$$

Logo, a equação para o acoplamento global pode ser escrita como

$$x_{n+1}^{(i)} = (1 - \varepsilon)f(x_n^{(i)}) + \frac{\varepsilon}{N} \sum_{j=1}^N f(x_n^{(j)}), \quad (5.25)$$

sendo que, como veremos, isto é feito para facilitar a obtenção de uma relação analítica para os expoentes de Lyapunov.

A Jacobiana é dada por

$$\mathbf{J}_n = \begin{pmatrix} [(1 - \varepsilon) + \frac{\varepsilon}{N}]f'(x_n^{(1)}) & \frac{\varepsilon}{N}f'(x_n^{(2)}) & \cdots & \frac{\varepsilon}{N}f'(x_n^{(N)}) \\ \frac{\varepsilon}{N}f'(x_n^{(1)}) & [(1 - \varepsilon) + \frac{\varepsilon}{N}]f'(x_n^{(2)}) & \cdots & \frac{\varepsilon}{N}f'(x_n^{(N)}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\varepsilon}{N}f'(x_n^{(1)}) & \frac{\varepsilon}{N}f'(x_n^{(2)}) & \cdots & [(1 - \varepsilon) + \frac{\varepsilon}{N}]f'(x_n^{(N)}) \end{pmatrix}, \quad (5.26)$$

como $f'(x_n^{(i)}) = f'(x_n)$, temos

$$\mathbf{J}_n = f'(x_n) \begin{pmatrix} (1 - \varepsilon) + \varepsilon/N & \varepsilon/N & \cdots & \varepsilon/N \\ \varepsilon/N & (1 - \varepsilon) + \varepsilon/N & \cdots & \varepsilon/N \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varepsilon/N & \varepsilon/N & \cdots & (1 - \varepsilon) + \varepsilon/N \end{pmatrix}, \quad (5.27)$$

que pode ser escrita como

$$\mathbf{J} = f'(x_n) \left[(1 - \varepsilon)\mathbf{I} + \frac{\varepsilon}{N}\mathbf{D} \right], \quad (5.28)$$

sendo que \mathbf{I} é uma matriz identidade,

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}, \quad (5.29)$$

onde todos os elementos são nulos com exceção dos elementos da diagonal principal que são iguais a 1 e \mathbf{D} é uma matriz constante,

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}, \quad (5.30)$$

que apresenta todos os elementos iguais a 1. A matriz \mathbf{D} de tamanho $N \times N$ tem um autovalor igual a N e os demais $N - 1$ autovalores nulos. Isto faz com que o autovalores $\beta^{(i)}$ da Jacobiana sejam

$$\beta^{(1)} = f'(x_n), \quad (5.31)$$

e

$$\beta^{(j)} = f'(x_n)(1 - \varepsilon), \quad (5.32)$$

onde $j = 2, 3, \dots, N$.

Portanto, os expoentes de Lyapunov são dados pelas seguintes equações

$$\lambda^{(1)} = \gamma, \quad (5.33)$$

e

$$\lambda^{(j)} = \gamma + \ln |1 - \varepsilon|. \quad (5.34)$$

sendo que γ é o expoente de Lyapunov para o mapa isolado (Kaneko, 1990).

Com os expoentes de Lyapunov pretendemos analisar o comportamento da média dos expoentes de Lyapunov positivos para o caso do acoplamento de alcance variável (2.29), que permite a transição do caso local para o global. A média dos expoentes de Lyapunov positivos (densidade de entropia KS) é definida como

$$h = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{\lambda^{(i)} > 0} \lambda^{(i)}, \quad (5.35)$$

sendo que a somatória é realizada sobre todos os expoentes de Lyapunov positivos e N é o número total de expoentes de Lyapunov. A entropia KS (Kolmogorov e Sinai) é importante já que ela mede a taxa assintótica da criação de informação pelo sistema dinâmico (Ruelle, 1989), e assim fornece a medida quantitativa de seu grau de caoticidade. A entropia KS é baseada na formulação de Shannon do grau de incerteza da capacidade de prever um resultado de um evento probabilístico, dada por

$$H_S = \sum_{i=1}^r p_i \ln \frac{1}{p_i}, \quad (5.36)$$

onde é definido $p \ln(1/p) = 0$ se $p = 0$. Pesin (1976) mostrou que a entropia KS é igual a somatória dos expoentes de Lyapunov positivos para sistemas Hamiltonianos, e também foi mostrado por Ruelle (1989) para atratores de sistemas dinâmicos dissipativos axioma A. A igualdade entre h e a densidade de entropia KS é geralmente válida para sistemas que têm uma medida de Sinai-Ruelle-Bowen (SRB), como os sistemas Axioma A (Ruelle, 1989). A medida SRB é sustentada sobre um atrator e descreve a estatística de um comportamento a longo tempo das órbitas, para quase todas as condições iniciais na correspondente bacia de atração, com respeito a medida de Lebesgue. A medida SRB foi construída para redes de mapas do círculo acoplados (Bricmont, 1997). Embora existam resultados sobre a medida SRB em um contexto geral (Keller, 1992), sabe-se que não há provas rigorosas que tal medida exista para redes da forma (2.29). A dificuldade técnica encontra-se na não existência de partições de Markov para mapas acoplados.

Dependendo do parâmetro de acoplamento ε e do parâmetro de não linearidade r a escolha das condições iniciais $x_0^{(i)}$ acarreta comportamentos dinâmicos diferentes, ou seja, um comportamento periódico pode tornar-se irregular apenas alterando as condições iniciais. Como esta dependência em relação as condições iniciais não ocorre para todos os valores de ε e r podemos encontrar tais valores para analisarmos a transição da supressão de caos para caos espaço temporal. Desta forma calculamos a média dos expoentes positivos, tanto para o acoplamento global como para o local, para diferentes condições iniciais ($x_0^{(i)}$), o que nos permite encontrar parâmetros para os quais não ocorre dependência do comportamento dinâmico da rede com relação as condições iniciais. A figura (5.5) exhibe o cálculo da média dos expoentes positivos para o caso do acoplamento global ($h = 0, 0$) e do local ($h \approx 0, 1$), onde foi considerado uma rede de 49 sítios, $r = 2, 0$, $\varepsilon = 0, 3$, condições de contorno periódicas e condições iniciais aleatórias. Para cada cálculo de h foram usadas diferentes condições iniciais aleatórias, sendo que na figura (5.5) calculamos a média dos expoentes positivos para 500 diferentes condições iniciais aleatórias μ dadas para a rede. Assim, podemos ver que para $r = 2, 0$ e $\varepsilon = 0, 3$, para o acoplamento global ($\alpha = 0, 0$) temos supressão de caos com 2 agrupamentos e para o acoplamento local ($\alpha = 4, 0$) temos caos espaço temporal independente das condições iniciais. Logo

podemos analisar a transição da supressão de caos para caos espaço temporal sem nos preocuparmos com as condições iniciais considerando os parâmetros já mencionados.

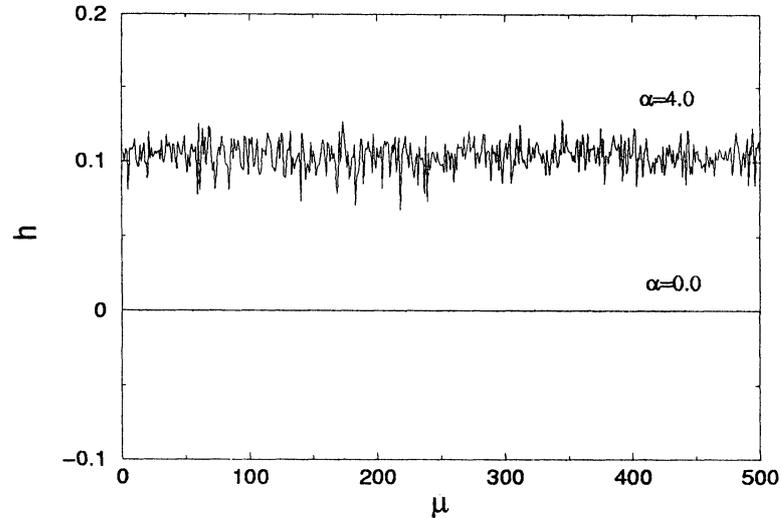


Figura 5.5: Cálculo da média dos expoentes de Lyapunov positivos para $\mu = 500$, $N = 49$, $r = 2, 0$, $\varepsilon = 0, 3$ e condições de contorno periódicas.

Devido às flutuações de h , como podemos ver na figura (5.5), por causa das condições iniciais, vamos trabalhar daqui para frente com h médio

$$\langle h \rangle = \frac{1}{\mu} \sum_1^{\mu} h_{\mu}, \quad (5.37)$$

onde μ é o número de diferentes condições iniciais aleatórias para a rede. Também iremos trabalhar com uma rede de 49 sítios porque para este valor de N a rede já atingiu um comportamento estacionário. O comportamento estacionário a que nos referimos é que a rede não apresenta nenhuma alteração no seu comportamento dinâmico com o aumento do número de sítios. Isto pode ser visto por meio da figura (5.6) que exhibe o comportamento estacionário a partir de um determinado valor de N para alguns valores de α . Na figura (5.6) foi considerada $r = 2, 0$, $\varepsilon = 0, 3$, condições de contorno periódicas e 5 diferentes condições iniciais aleatórias para rede ($\mu = 5$) para o cálculo de h médio.

Agora vamos analisar o comportamento de h médio durante a transição da supressão de caos no acoplamento global para caos espaço temporal no acoplamento local. A figura (5.7) mostra este comportamento, que ocorre na forma aproximada de uma função polinomial de quarta ordem

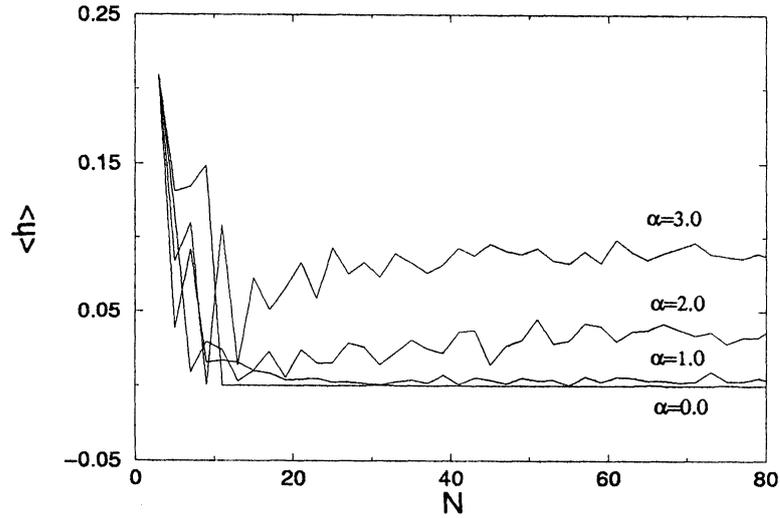


Figura 5.6: Cálculo de h médio variando o número de sítios N , sendo que foram consideradas condições de contorno periódicas, $r = 2, 0$ e $\varepsilon = 0, 3$. O valor de $\langle h \rangle$ foi calculado para $\mu = 5$.

$$\langle h \rangle = a_0 + a_1\alpha + a_2\alpha^2 + a_3\alpha^3 + a_4\alpha^4, \quad (5.38)$$

sendo $a_0 = 0,00462$, $a_1 = -0,01988$, $a_2 = 0,01214$, $a_3 = 0,0005651$ e $a_4 = -0,0015$ os coeficientes do polinômio. Considerando que a transição começa a ocorrer após $\alpha = 1,0$, pois antes desse valor o comportamento é global, e termina em $\alpha = 3,0$, porque depois deste valor o comportamento da rede é local, e temos (coeficiente de correlação igual a 0,97)

$$\langle h \rangle = b_1\alpha^{b_2}, \quad (5.39)$$

sendo b_1 e b_2 constantes com os respectivos valores 0,002346 e 3,5493.

Estudaremos o comportamento do maior expoente de Lyapunov médio $\langle \lambda_m \rangle$ com relação ao parâmetro de alcance α . A figura (5.8) mostra que tal comportamento é da forma de uma função exponencial

$$\alpha = c_1 e^{c_2 \langle \lambda_m \rangle}, \quad (5.40)$$

tendo como constantes $c_1 = 0,457808$ e $c_2 = 5,461737$. Para traçar a figura foi

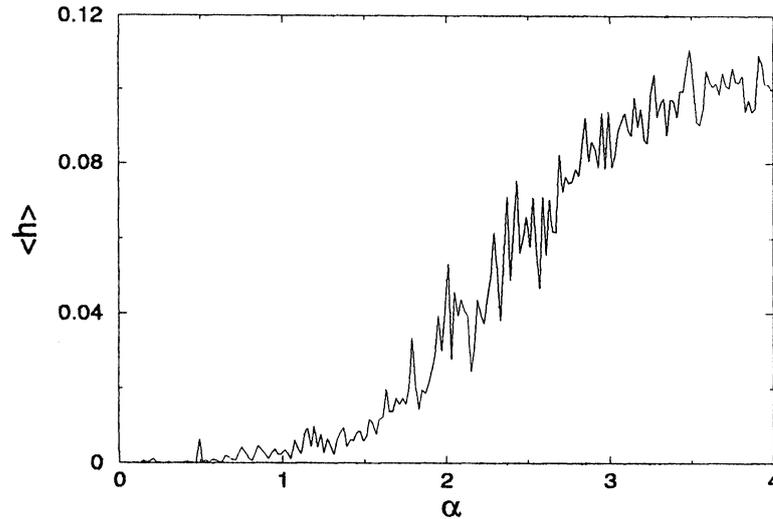


Figura 5.7: $\langle h \rangle$ versus α para uma rede com 49 sítios, $r = 2, 0$, $\varepsilon = 0, 3$, condições de contorno periódicas e $\mu = 5$.

considerado $N = 49$, $r = 2, 0$, $\varepsilon = 0, 3$, condições de contorno periódicas e para o cálculo do maior expoente de Lyapunov médio foi tomado a média, para cada α , de 5 diferentes condições iniciais aleatórias.

A situação que estamos analisando é a transição de supressão de caos no acoplamento global (fig. 5.9) para para caos espaço temporal no acoplamento local (fig.5.10). A transição que ocorre é a de intermitência espaço temporal (Chaté, 1989), como podemos ver pela figura (5.11). Na intermitência espaço temporal há movimento laminar e irregular (*burst*) no espaço e no tempo. O movimento laminar é caracterizado por estruturas regulares enquanto que os *bursts* são estruturas que não apresentam nenhuma regularidade em seu movimento tanto no espaço quanto no tempo.

Vamos calcular a média dos expoentes de Lyapunov positivos variando o parâmetro de acoplamento ε e o alcance α . A figura (5.12) mostra o cálculo no qual foi considerado uma rede com 49 mapas acoplados, $r = 2$ e condições de contorno periódicas. O valor médio de h foi calculado tomando 5 diferentes condições iniciais aleatórias.

Para entender algumas características da figura (5.12) analisaremos o diagrama de fase (5.13), que está disponível na literatura para os casos globais e locais (Kaneko, 1989, 1990). Nós apresentamos nas figuras (5.13a) e (5.13b) seções se cruzando (em $r = 2$) dos diagramas de fases para o acoplamento global ($\alpha = 0$) e o local (α grande), respectivamente. O caso global apresenta uma fase grande

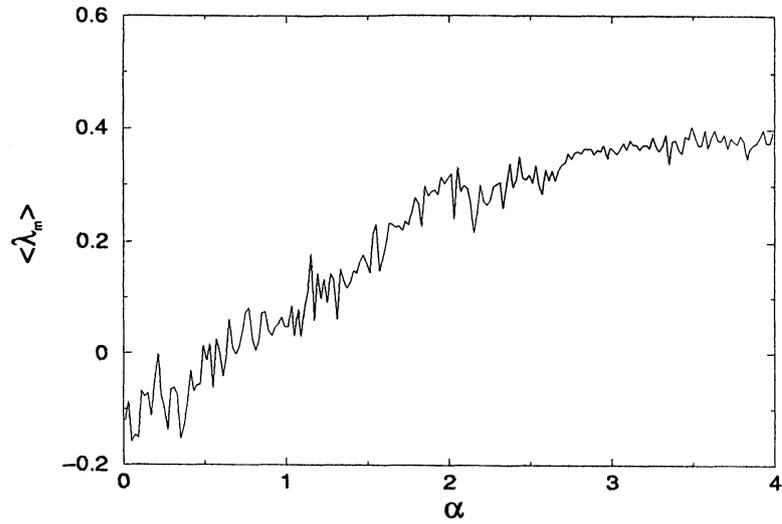


Figura 5.8: $\langle \lambda_m \rangle \times \alpha$ para uma rede com 49 sítios, $r = 2, 0$, $\varepsilon = 0, 3$, condições de contorno periódicas e $\mu = 5$.

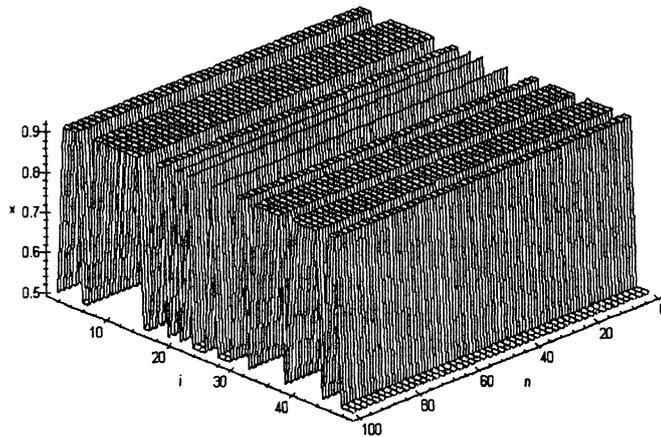


Figura 5.9: Padrão espaço temporal para a supressão de caos no acoplamento global ($\alpha = 0, 0$) com 2 agrupamentos. Foi considerado $N = 49$, $r = 2, 0$, $\varepsilon = 0, 3$, condições de contorno periódicas e condições iniciais aleatórias.

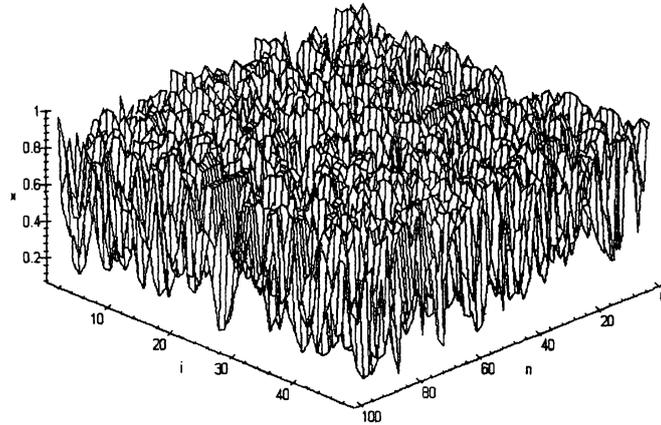


Figura 5.10: Padrão espaço temporal para caos espaço temporal no acoplamento local ($\alpha = 3, 0$). Foi considerado $N = 49$, $r = 2, 0$, $\varepsilon = 0, 3$, condições de contorno periódicas e condições iniciais aleatórias.

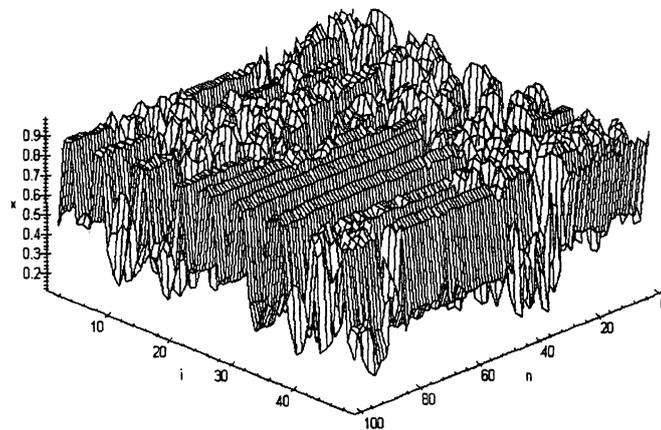


Figura 5.11: Padrão espaço temporal para intermitência espaço temporal para $\alpha = 2, 0$. Foi considerado $N = 49$, $r = 2, 0$, $\varepsilon = 0, 3$, condições de contorno periódicas e condições iniciais aleatórias.

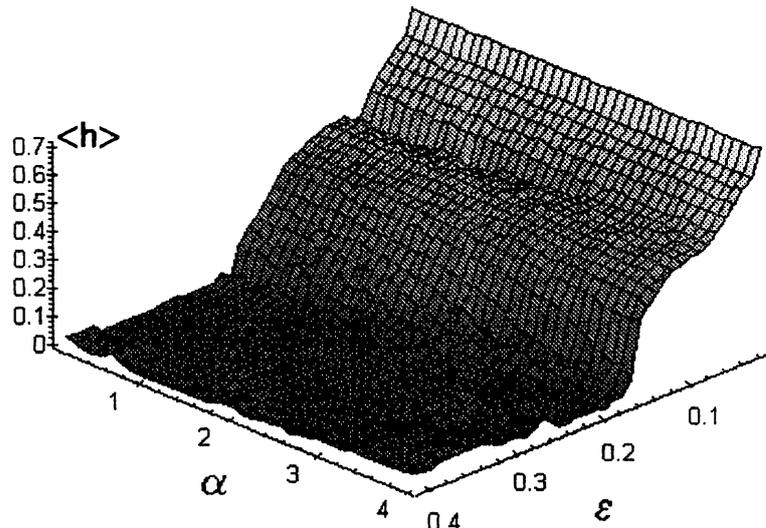


Figura 5.12: $\langle h \rangle \times \epsilon \times \alpha$ para uma rede com 49 mapas, sendo que foi considerado $r = 2$, condições de contorno periódicas e 5 diferentes condições iniciais aleatórias para o cálculo da média de h .

de caos espaço temporal (chamada de C na figura 5.13a) para $0 < \epsilon < 0,207$, correspondendo na figura (5.12) a região grande de valores altos de $\langle h \rangle$. No intervalo $0,207 < \epsilon < 0,238$ temos intermitência espaço temporal (I). Além disso, valores do parâmetro de acoplamento exibem fases ordenadas com 2 e 3 agrupamentos dominantes (O2 e O3) quando $0,238 < \epsilon < 0,339$, e finalmente uma fase vítrea (V) para $0,339 < \epsilon < 4,000$. O aumento fraco de $\langle h \rangle$ é compatível com a existência da fase vítrea. A fase vítrea apresenta um grande número de possíveis atratores e o tamanho dos agrupamentos pode tomar valores arbitrários, dependendo das condições iniciais.

No caso do acoplamento local podemos considerar $\alpha = 4$, como foi feito para o cálculo de $\langle h \rangle$ na figura (5.12) para comparação com o diagrama (5.13b). É improvável que alguma nova característica ocorra para o parâmetro de alcance α alto, já que para α maior do que 3,0 o acoplamento é essencialmente entre os vizinhos próximos, o da direita e o da esquerda. Para $0 < \epsilon < 0,117$ temos o estado de caos espaço temporal (C) no diagrama de fase da figura (5.13b). Isto corresponde a região caracterizada por valores altos de h , como no caso global. O intervalo $0,117 < \epsilon < 0,200$, onde há um tipo de vale de h pequeno na figura (5.12), corresponde a defeitos (caos fraco) (D) para $0,117 < \epsilon < 0,138$, ocorre o movimento Browniano de defeitos (B) (oscilação caótica) para $0,138 < \epsilon < 0,172$ e seleção de padrão com domínios selecionados de tamanhos 1 e 2 (P) para $0,172 < \epsilon < 0,200$. Nós verificamos, numericamente, que este vale continua a existir para α tão alto quanto 400. Para valores do parâmetro de acoplamento no intervalo $0,2 < \epsilon < 0,4$ existe

uma nova região de caos espaço temporal (C), que é uma segunda frente de valores mais altos de h . Os valores de h observados na segunda frente são menores devido ao forte acoplamento que impede a existência de um grande número de atratores caóticos (Batista, 2001 a).

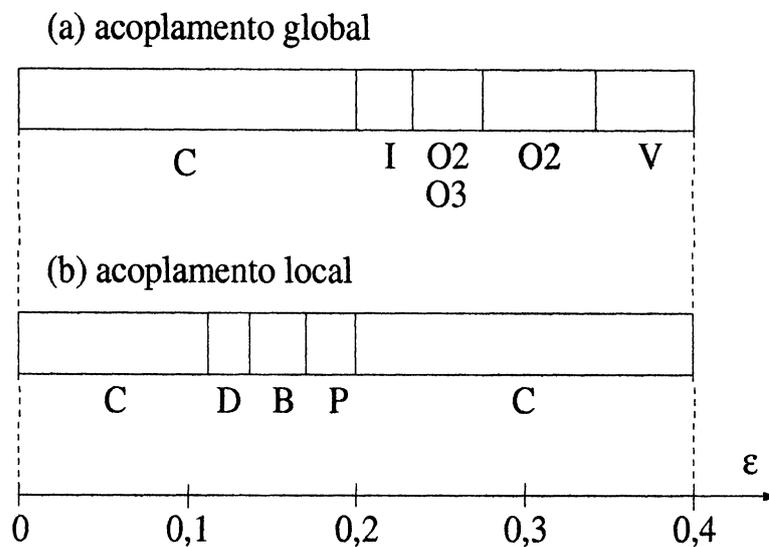


Figura 5.13: Padrões espaço temporais para o mapa $x_{n+1} = 1 - rx^2$ com $r = 2$ para alguns valores do parâmetro de acoplamento nos casos: (a) global, e (b) local. C: caos espaço temporal, I: intermitência espaço temporal, O2 e O3: fase ordenada com 2 e 3 agrupamentos dominantes, V: vítrea, D: defeitos, B: movimento Browniano de defeitos, P: seleção de padrão.

Capítulo 6

Sincronização e Espectro de Lyapunov de Mapas Lineares por Partes Acoplados em Rede

Usamos mapas acoplados como um modelo de sistema dinâmico para analisar a sincronização. A sincronização foi descoberta por Christiaan Huygens em 1665 para a oscilação de dois pêndulos acoplados. Osciladores acoplados são comuns em muitas áreas da ciência, como comunicação, ótica, engenharia, biologia, etc. Winfree (Winfree, 1968) verificou que uma classe de osciladores acoplados com diferentes frequências internas repentinamente sincronizavam em uma frequência comum quando o acoplamento entre os osciladores excedia um valor crítico. Esses modelos poderiam dar idéia do comportamento de sistemas rítmicos biológicos, tais como a sincronização do brilho de vagalumes, células cardíacas, etc.

A sincronização de osciladores tem importantes aplicações práticas em sistemas eletrônicos. Por exemplo, em projetos de sistemas de micro-ondas as potências de muitos dispositivos podem ser combinadas por meio de sincronização para alcançar uma potência que aumenta quadraticamente com o número de osciladores (Vieira, 1994).

Com o estudo de caos, a sincronização é estendida para o caso de oscilações caóticas. O efeito de sincronização de fase de sistemas caóticos tem sido descrito teoricamente (Pikovsky, 1997) (Osipov, 1997) e experimentalmente (Parlitz, 1996). O fenômeno de sincronização de fase de sistemas caóticos pode ser definida como a relação entre as fases de sistemas que estão interagindo, sendo que a amplitude permanece caótica e, em geral, não correlacionada. Este efeito foi demonstrado para osciladores de Rössler acoplados (Osipov, 1997), para osciladores caóticos acoplados (Hu, 2000) (Wang, 2000) e para a situação de sincronização externa por perturbação periódica ou aleatória (Pikovsky, 1997 b). A sincronização de fase foi observada

experimentalmente em um modelo eletrônico de dois osciladores de Rössler acoplados (Parlitz, 1996). Também é possível a sincronização de amplitude, ou seja, os osciladores apresentam o mesmo valor para a variável de estado. Pecora e Carroll (Pecora, 1990) mostraram que dois osciladores caóticos podem sincronizar em amplitude, isto é, apresentarem $x_1(t) = x_2(t)$ (Gong, 1998).

Para estudar a sincronização em uma rede de mapas acoplados utilizaremos acoplamento do tipo potência dado pela equação (2.29). Este acoplamento apresenta o acoplamento local e o global como casos limites.

6.1 Espectro de Lyapunov

Consideraremos para a dinâmica local o mapa

$$x_{n+1} = \beta x_n \quad (\text{módulo } 1) \quad (6.1)$$

sendo que para $x \in [0, 1]$ e $\beta > 1$ exibe expoente de Lyapunov positivo e órbita caótica. O mapa não é contínuo e portanto não diferenciável em $x_k = 1/\beta^k$. Para as órbitas onde $x \neq x_k$, podemos calcular o expoente de Lyapunov

$$\lambda = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \sum_{n=1}^T \ln |f'(x_n)| = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \sum_{n=1}^T \ln |\beta| = \ln |\beta|. \quad (6.2)$$

Para uma rede de mapas acoplados temos que calcular o módulo dos autovalores da matriz Jacobiana. Os elementos da Jacobiana para o acoplamento (2.29) são obtidos pela relação (5.22). Para $\alpha \rightarrow \infty$ temos o acoplamento local e podemos obter uma expressão analítica usando o mapa βx e condições de contorno periódicas $x_n^{(0)} = x_n^{(N)}$ e $x_n^{(N+1)} = x_n^{(1)}$. A Jacobiana, para este caso, fica da seguinte forma

$$\mathbf{J} = \beta \begin{pmatrix} 1 - \varepsilon & \varepsilon/2 & 0 & \cdots & \varepsilon/2 \\ \varepsilon/2 & 1 - \varepsilon & \varepsilon/2 & \cdots & 0 \\ 0 & \varepsilon/2 & 1 - \varepsilon & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \varepsilon/2 & \cdots & \cdots & \varepsilon/2 & 1 - \varepsilon \end{pmatrix}. \quad (6.3)$$

A Jacobiana não é somente simétrica mas também circulante. Uma matriz é circulante se pudermos obter a linha seguinte movendo os elementos uma posição para a direita, com o elemento do final da linha sendo deslocado para o início. A matriz circulante

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} c_0 & c_1 & \cdots & c_{N-1} \\ c_{N-1} & c_0 & \cdots & c_{N-2} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ c_1 & c_2 & \cdots & c_0 \end{pmatrix}, \quad (6.4)$$

apresenta a seguinte equação (ou polinômio) característica (Davis, 1979)

$$c_0 + c_1 s_i + \cdots + c_{N-1} s_i^{N-1} = 0, \quad (6.5)$$

tendo como raízes

$$s_i = \exp(2\pi i I / N) = \cos(2\pi i / N) + I \operatorname{sen}(2\pi i / N), \quad (6.6)$$

sendo $I = \sqrt{-1}$. Assim, os autovalores γ_i da Jacobiana são

$$\gamma_i = \beta \left(1 - \varepsilon + \frac{\varepsilon}{2} s_i + \frac{\varepsilon}{2} s_i^{N-1} \right), \quad (6.7)$$

$$\gamma_i = \beta \left[1 - \varepsilon + \frac{\varepsilon}{2} (s_i + s_i^{N-1}) \right], \quad (6.8)$$

usando a equação (6.6), temos

$$\gamma_i = \beta \left\{ 1 - \varepsilon + \frac{\varepsilon}{2} \left[\exp \frac{2\pi i I}{N} + \left(\exp \frac{2\pi i I}{N} \right)^{N-1} \right] \right\} \quad (6.9)$$

$$= \beta \left\{ 1 - \varepsilon + \frac{\varepsilon}{2} \left[\exp \frac{2\pi i I}{N} + \exp(2\pi i I) \cdot \exp -\frac{2\pi i I}{N} \right] \right\} \quad (6.10)$$

$$= \beta \left\{ 1 - \varepsilon + \frac{\varepsilon}{2} \left[\cos \frac{2\pi i}{N} + I \operatorname{sen} \frac{2\pi i}{N} + (\cos 2\pi i + I \operatorname{sen} 2\pi i) \cdot \left(\cos \frac{2\pi i}{N} - I \operatorname{sen} \frac{2\pi i}{N} \right) \right] \right\} \quad (6.11)$$

$$\gamma_i = \beta \left(1 - \varepsilon + \varepsilon \cos \frac{2\pi i}{N} \right), \quad (6.12)$$

logo os expoentes de Lyapunov são dados pela seguinte relação

$$\lambda_i = \ln |\beta| + \ln \left| 1 - \varepsilon + \varepsilon \cos \frac{2\pi i}{N} \right|, \quad (6.13)$$

quando os mapas estão desacoplados ($\varepsilon = 0$) temos $\ln |\beta|$, que é o expoente de Lyapunov para o mapa βx isolado.

O máximo expoente de Lyapunov é igual a $\ln \beta$, e diminui com i , embora o espectro de Lyapunov possa assumir qualitativamente diferentes características de acordo com os valores assumidos pelo parâmetro de acoplamento, e esquematicamente mostrado na figura (6.1). Na figura (6.1a) todos os expoentes de Lyapunov são positivos. Devido a característica de simetria do termo de acoplamento (sítios do lado esquerdo e lado direito contribuem igualmente) o espectro também é simétrico com respeito a $i = N/2$, onde o correspondente expoente é denotado por λ_m . Uma condição necessária para o espectro como o descrito na figura (6.1a) é que $\lambda_m > 0$. Aplicando esta condição (6.13) temos

$$\varepsilon < \varepsilon_1 = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{\beta} \right), \quad (6.14)$$

ou

$$\varepsilon > \varepsilon_2 = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{\beta} \right). \quad (6.15)$$

Para $\beta = 3$ temos $\varepsilon_1 = 1/3$ e $\varepsilon_2 = 2/3$. A figura (6.1a) é para $\varepsilon < \varepsilon_1$, quando todos os expoentes de Lyapunov são positivos. Neste caso λ_m é um valor mínimo dos expoentes de Lyapunov, e torna-se igual a zero para $\varepsilon = \varepsilon_1$ (figura 6.1b).

Aumentando o parâmetro de acoplamento (figura 6.1c), há alguns expoentes negativos para $i_1 < i < i_2$, onde $i_{1,2}$ são as raízes da expressão (6.13). Esta situação vai até $\varepsilon = 1/2$ (figura 6.1d), onde o expoente $\lambda_{N/2}$ diverge. Para $1/2 < \varepsilon < \varepsilon_2$ a situação é descrita na figura (6.1e), na qual há dois expoentes divergentes $i = l_{1,2}$. Quando $\varepsilon = \varepsilon_2$, como mostra a figura (6.1f), o expoente $\lambda_{N/2}$ é igual a zero novamente, e alguns expoentes tornam-se positivos (figura 6.1g) para $\varepsilon > \varepsilon_2$. Os intervalos para que os expoentes são positivos, denominados $(0, i_1)$, (i_2, i_3) e (i_4, N) , tem seus limites dados por raízes reais e positivas. Finalmente, para $\varepsilon = 1$ (figura 6.1h) o expoente $\lambda_{N/2}$ é $\ln \beta$, e os pontos de divergência são $l_1(1) = N/4$ e $l_2(1) = 3N/4$, respectivamente.

Para $\alpha = 0$, o acoplamento dado pela equação (2.29) fornece o acoplamento global da forma

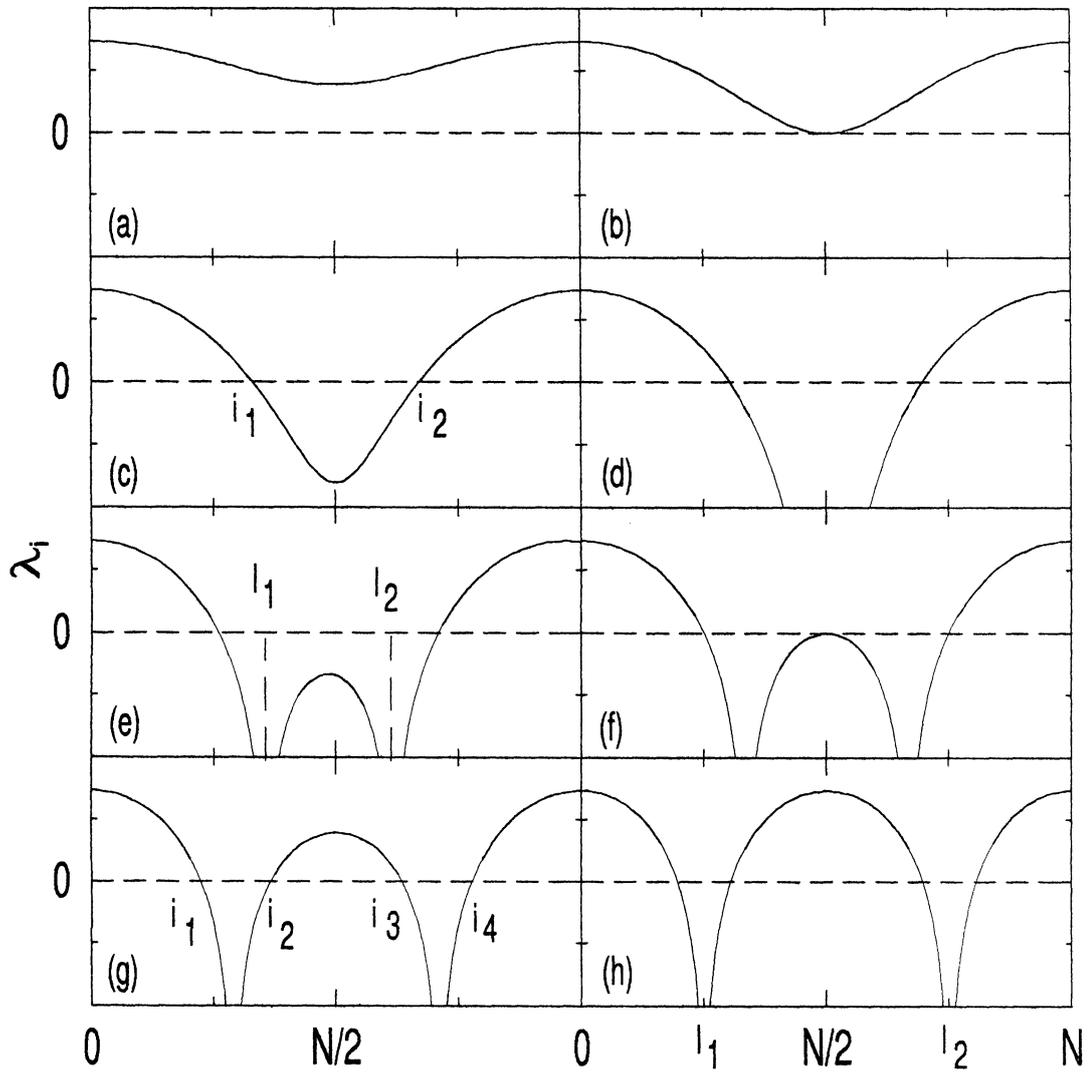


Figura 6.1: Espectro de Lyapunov para a rede de mapas lineares por partes acoplados: (a) $0 < \varepsilon < \varepsilon_1$; (b) $\varepsilon = \varepsilon_1$; (c) $\varepsilon_1 < \varepsilon < 1/2$; (d) $\varepsilon = 1/2$; (e) $1/2 < \varepsilon < \varepsilon_2$; (f) $\varepsilon = \varepsilon_2$; (g) $\varepsilon_2 < \varepsilon < 1$; (h) $\varepsilon = 1$.

$$x_{n+1}^{(i)} = (1 - \varepsilon)f(x_n^{(i)}) + \frac{\varepsilon}{N-1} \sum_{j=1, j \neq i}^N f(x_n^{(j)}), \quad (6.16)$$

e a Jacobiana é dada por

$$\mathbf{J} = \beta \begin{pmatrix} (1 - \varepsilon) & \frac{\varepsilon}{N-1} & \cdots & \frac{\varepsilon}{N-1} \\ \frac{\varepsilon}{N-1} & (1 - \varepsilon) & \cdots & \frac{\varepsilon}{N-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\varepsilon}{N-1} & \frac{\varepsilon}{N-1} & \cdots & (1 - \varepsilon) \end{pmatrix}, \quad (6.17)$$

que pode ser escrita como

$$\mathbf{J} = \beta \left[(1 - \varepsilon)\mathbf{I} + \frac{\varepsilon}{N-1}\mathbf{D} \right], \quad (6.18)$$

sendo que \mathbf{I} é uma matriz identidade e \mathbf{D} é uma matriz,

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \quad (6.19)$$

que apresenta todos os elementos iguais a 1, com exceção da diagonal principal que tem os elementos iguais a zero. A matriz \mathbf{D} de tamanho $N \times N$ tem um autovalor igual a $N - 1$ e os demais $N - 1$ autovalores são iguais a -1 . Isto faz com que o autovalores γ_i da Jacobiana sejam

$$\gamma_1 = \beta, \quad (6.20)$$

e

$$\gamma_j = \beta \left(1 - \varepsilon - \frac{\varepsilon}{N-1} \right), \quad (6.21)$$

com $j = 2, 3, \dots, N$.

Portanto, para o acoplamento global, onde o mapa considerado é o $f(x) = \beta x$ e ocorre o estado coerente, os expoentes de Lyapunov são dados pelas seguintes equações

$$\begin{cases} \lambda_1 = \ln |\beta| \\ \lambda_j = \ln |\beta| + \ln \left| 1 - \varepsilon - \frac{\varepsilon}{N-1} \right|. \end{cases} \quad (6.22)$$

Na sincronização de caos ocorre que um expoente de Lyapunov é positivo enquanto que os demais são negativos. Nesta situação também temos um estado coerente, o que nos permite usar as equações (6.22), no caso do acoplamento global. Como $\lambda_1 = \ln \beta > 0$ vamos determinar o valor de ε para que seja possível o aparecimento da sincronização de caos. Logo

$$\lambda_j = \ln \beta + \ln |1 - \varepsilon| < 0, \quad (6.23)$$

$$\ln |1 - \varepsilon| < \ln \beta^{-1}, \quad (6.24)$$

considerando $0 \leq \varepsilon < 1$, temos que

$$\ln |1 - \varepsilon| = \ln(1 - \varepsilon), \quad (6.25)$$

assim

$$\varepsilon > 1 - \frac{1}{\beta}. \quad (6.26)$$

Com o espectro de Lyapunov podemos calcular a densidade de entropia KS (h). A figura (6.2) mostra o cálculo de h para o caso global ($\alpha = 0$) em função do parâmetro de acoplamento ε , usando as equações (6.22) e considerando $\beta = 3$ para uma rede com 501 mapas. A partir de $\varepsilon = 2/3$ temos apenas um expoente de Lyapunov positivo que é $\lambda_1 = \ln 3$. Isto pode ser verificado pela equação (6.26) usando $\beta = 3$.

Considerando $N \gg 1$, tal que a distância entre os sítios i seja pequena o suficiente para permitir que a consideremos como um valor contínuo, a equação para a média dos expoentes de Lyapunov positivos h pode ser escrita da seguinte forma

$$h = \frac{1}{N} \int \lambda(i) di, \quad (6.27)$$

que usaremos para determinar equações analíticas para alguns casos do acoplamento local (α grande). Um destes casos é para $\varepsilon < \varepsilon_1$ e neste caso todos os expoentes de Lyapunov são positivos e a integral (6.27) toma a seguinte forma

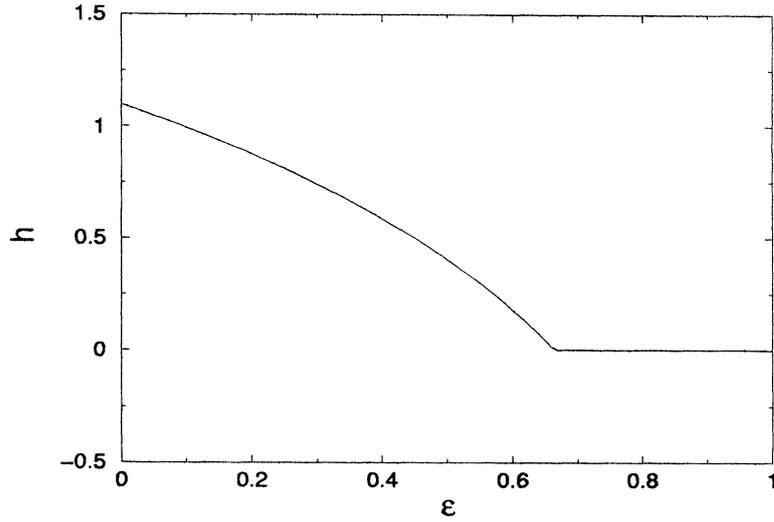


Figura 6.2: Cálculo da média dos expoentes de Lyapunov positivos variando ε usando as equações (6.22). Foi considerado uma rede com 501 mapas e $\beta = 3$.

$$h = \frac{1}{N} \int_0^N \lambda(i) di, \quad (6.28)$$

substituindo a equação (6.13) na integral, obtemos

$$h = \frac{1}{N} \int_0^N \left\{ \ln \beta + \ln \left[1 - \varepsilon + \varepsilon \cos \left(\frac{2\pi i}{N} \right) \right] \right\} di, \quad (6.29)$$

sendo que não há necessidade do módulo para $\varepsilon < 0,5$. Separando em duas integrais temos

$$h = \ln \beta + \frac{1}{N} \int_0^N \ln \left[1 - \varepsilon + \varepsilon \cos \left(\frac{2\pi i}{N} \right) \right] di. \quad (6.30)$$

Para a solução da integral definiremos $y = 2\pi i/N$, que fornece novos limites, sendo o inferior igual a 0 e o superior igual a 2π ,

$$h = \ln \beta + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln[1 - \varepsilon + \varepsilon \cos y] dy. \quad (6.31)$$

Considerando $z = \varepsilon(1 - \cos y)$ e $\varepsilon \ll 1$, obtemos

$$\ln(1 - z) = -z - \frac{z^2}{2} - \frac{z^3}{3} - \dots = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k}, \quad (6.32)$$

que permite escrever a integral da seguinte forma

$$h = \ln \beta - \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon^k}{k} \int_0^{2\pi} (1 - \cos y)^k dy, \quad (6.33)$$

resultando em

$$h = \ln \beta - \varepsilon - \frac{3\varepsilon^2}{4} - \frac{5\varepsilon^3}{6} - \dots \quad (6.34)$$

A figura (6.3) mostra os resultados para a média dos expoentes de Lyapunov positivos para $\beta = 3$, $N = 1000$ e usando a equação $\lambda_i = \ln \beta + \ln |1 - \varepsilon + \varepsilon \cos(2\pi i/N)|$ (linha contínua) e a equação (6.34) (linha pontilhada e tracejada). Na linha pontilhada foram considerados termos até segunda ordem em ε e na linha tracejada termos até terceira ordem. Para $\varepsilon > \varepsilon_1$ começa o surgimento de expoentes de Lyapunov positivos, que sai das considerações feitas para a obtenção da equação (6.34). Além disso quanto menor o valor do parâmetro de acoplamento, melhor a aproximação dos resultados, devido a expansão realizada para a solução da integral.

Agora vamos analisar o caso, ainda local (α grande), para $\varepsilon = 1$. Neste caso, $\lambda_{N/2}$ é igual a $\ln \beta$, o que permite a separação da região acima do gráfico em quatro áreas iguais, como mostra a figura (6.1f). Assim, calcularemos a área que vai de zero até a primeira raiz i_1 (da esquerda para a direita) e multiplicaremos o resultado da integral por 4 para obtermos h . Calculamos i_1 da seguinte forma

$$\lambda_{i_1} = \ln \beta + \ln \left[\cos \left(\frac{2\pi i_1}{N} \right) \right] = 0, \quad (6.35)$$

$$i_1 = \frac{N}{2\pi} \arccos \frac{1}{\beta}. \quad (6.36)$$

Desta forma, a integral para h pode ser escrita como

$$h = \frac{4}{N} \int_0^{i_1} \left\{ \ln \beta + \ln \left[\cos \left(\frac{2\pi i}{N} \right) \right] \right\} di. \quad (6.37)$$

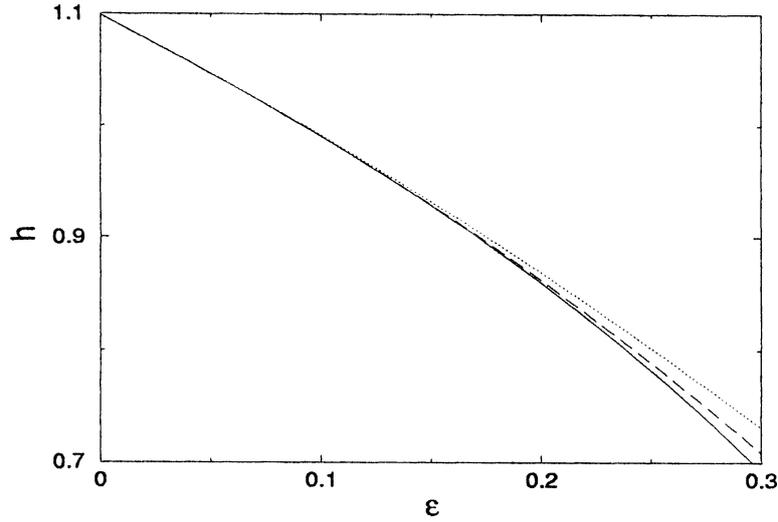


Figura 6.3: A linha contínua foi calculada usando a definição de h , a linha pontilhada e a linha tracejada foram calculadas usando a equação (6.34), até segunda ordem e até terceira ordem, respectivamente. Foi considerado $\beta = 3$ e $N = 1000$

Definindo $u = 2\pi i/N$, o limite inferior continua sendo zero e o limite inferior torna-se $u_1 = \arccos(1/\beta)$, assim

$$h = \frac{4i_i}{N} \ln \beta + \frac{2}{\pi} \int_0^{u_1} \ln(\cos u) du, \quad (6.38)$$

usando (Gradshteyn, 1994)

$$\int_0^{u_1} \ln(\cos u) du = \frac{u_1^3}{6} + \frac{u_1^5}{60} + \dots, \quad (6.39)$$

obtemos como resultado

$$h = \frac{2}{\pi} \ln \beta \arccos \frac{1}{\beta} - \frac{2}{\pi} \left(\frac{1}{6} \arccos^3 \frac{1}{\beta} + \frac{1}{60} \arccos^5 \frac{1}{\beta} + \dots \right). \quad (6.40)$$

A figura (6.4) mostra os resultados para a média dos expoentes de Lyapunov positivos para $\varepsilon = 1$, $N = 1000$ e usando a equação λ_i (linha contínua) e a equação (6.40) (linha pontilhada e tracejada). Na linha pontilhada foram considerados termos até terceira

ordem em $\arccos(1/\beta)$ e na linha tracejada termos até quinta ordem. Quanto menor o valor de β , melhor a aproximação dos resultados, devido a expansão realizada para a solução da integral. Aumentando o valor de β ocorre a necessidade de mais termos da série para melhorarmos o resultado (Batista, 2001 c).

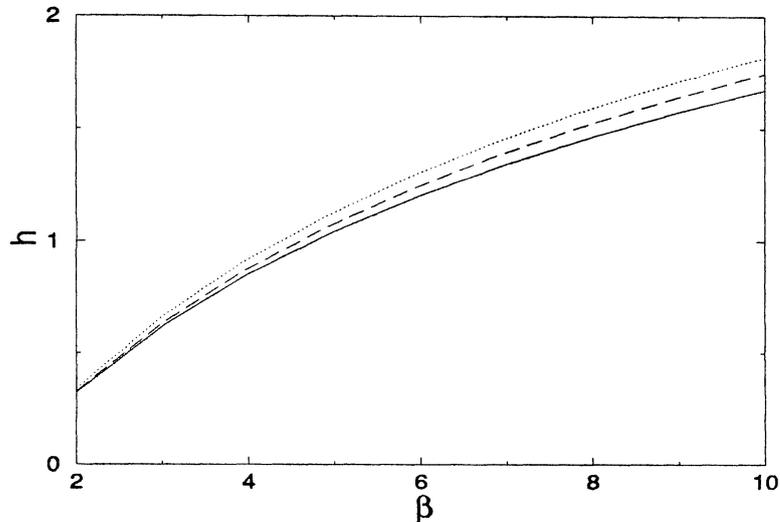


Figura 6.4: A linha contínua foi calculada usando a definição de h e a equação λ_i , a linha pontilhada e a linha tracejada foram calculadas usando a equação (6.40), até terceira ordem e até quinta ordem, respectivamente. Foi considerado $N = 1000$ e $\varepsilon = 1$.

Não usando os valores de α que fazem com que o acoplamento (2.29) torne-se local ou global, não podemos obter soluções analíticas para os expoentes de Lyapunov. Logo, como queremos analisar a transição do acoplamento global para o local, temos que calcular os expoentes de Lyapunov de maneira numérica. O método usado consiste em transformar a Jacobiana em uma matriz superior de Hessenberg e em seguida obter os autovalores.

Variando α e ε podemos ver, na figura (6.5), que para valores baixos do alcance e valores altos do parâmetro de acoplamento, a média dos expoentes positivos é baixa, o que representa um comportamento fracamente caótico. Fracamente caótico ocorre quando temos poucos expoentes de Lyapunov positivos. O nosso cálculo do maior expoente de Lyapunov sempre deu resultado igual a $\ln 3$, considerando $\beta = 3$, para qualquer valor de α e ε . Portanto, a rede de mapas $3x$ acoplados através do acoplamento (2.29) apresenta, para qualquer valor de α e ε , comportamento caótico, exceto quando seja dado a variável de estado x o valor da sua descontinuidade $x_k = m/\beta^k$ com m e k inteiros, que faz com que a variável de estado vá para o caso trivial que é o valor zero.

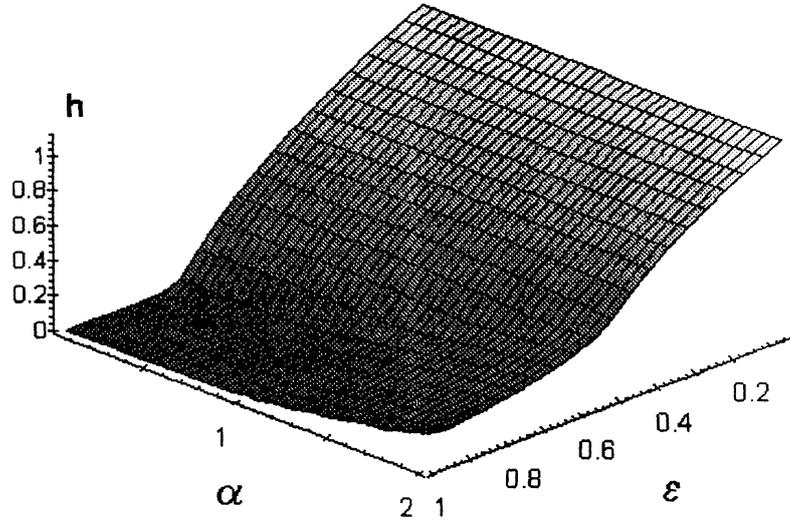


Figura 6.5: Cálculo da média dos expoentes de Lyapunov positivos variando o parâmetro de acoplamento ε e o alcance α . Foi considerado uma rede com 501 mapas βx e o acoplamento com alcance variável, para $\beta = 3$.

Com os expoentes de Lyapunov é possível obter a dimensão de Lyapunov. Em geral, esta dimensão fornece um número diferente da dimensão de contagem de caixas (*box-counting*), e é também conhecida como dimensão de informação para um típico atrator (Ott, 1993). A relação com a dimensão de contagem de caixas é que a dimensão de Lyapunov é menor ou igual a dimensão de contagem de caixas, consistindo em um limite inferior. Uma característica da dimensão de Lyapunov é que é mais fácil de ser calculada do que a contagem de caixas, desde que já tenham sido obtidos os expoentes de Lyapunov.

Considerando um mapa em \mathfrak{R}^N e uma órbita com expoentes de Lyapunov $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_N$, e p como o maior inteiro tal que

$$\sum_{i=1}^p \lambda_i \geq 0, \quad (6.41)$$

define-se a dimensão de Lyapunov D da órbita como

$$D = \begin{cases} 0 & \text{se nenhum } p \text{ existe} \\ p + \frac{1}{|\lambda_{p+1}|} \sum_{i=1}^p \lambda_i & \text{se } p < N \\ N & \text{se } p = N \end{cases} . \quad (6.42)$$

No caso de um mapa bidimensional com $\lambda_1 > 0 > \lambda_2$ e $\lambda_1 + \lambda_2 < 0$, temos

$$D = 1 + \frac{\lambda_1}{|\lambda_2|} . \quad (6.43)$$

Usando, como exemplo, os expoentes de Lyapunov para o mapa em \mathfrak{R}^2 , dado por

$$P(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{3}x, 2y & \text{se } 0 \leq y \leq \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}, 2y - 1 & \text{se } \frac{1}{2} < y \leq 1, \end{cases} , \quad (6.44)$$

temos $\lambda_1 = \ln 2$ e $\lambda_2 = -\ln 3$, que fornece para a dimensão de Lyapunov

$$D = 1 + \frac{\ln 2}{\ln 3} . \quad (6.45)$$

Este valor para a dimensão de Lyapunov está de acordo com a dimensão calculada pela contagem de caixas (Alligood, 1997).

A figura (6.6) mostra o cálculo da dimensão de Lyapunov para uma rede com 501 mapas $3x$ (módulo 1) acoplados usando o acoplamento com alcance variável, variando o parâmetro de acoplamento ε e o alcance α . Para valores de ε de zero até aproximadamente 0,66, para qualquer valor de α , a dimensão de Lyapunov é igual a 501. Este valor significa que todos os valores dos expoentes de Lyapunov são positivos. Para valores do parâmetro de acoplamento, aproximadamente, acima de 0,66 a dimensão de Lyapunov, no caso global, cai rapidamente para um valor muito baixo. No caso da rede apresentar um comportamento periódico, não temos nenhum Lyapunov positivo e a dimensão é igual a zero, o que não ocorre neste caso, já que o maior expoente de Lyapunov é sempre igual a $\ln 3$. Ainda, para ε maior do que 0,66, vemos um aumento na dimensão de Lyapunov quando o alcance α aumenta. Logo, o aumento da dimensão, deve-se ao fato do aumento no número de expoentes de Lyapunov positivos, que ocorre quando passamos do acoplamento global para o local.

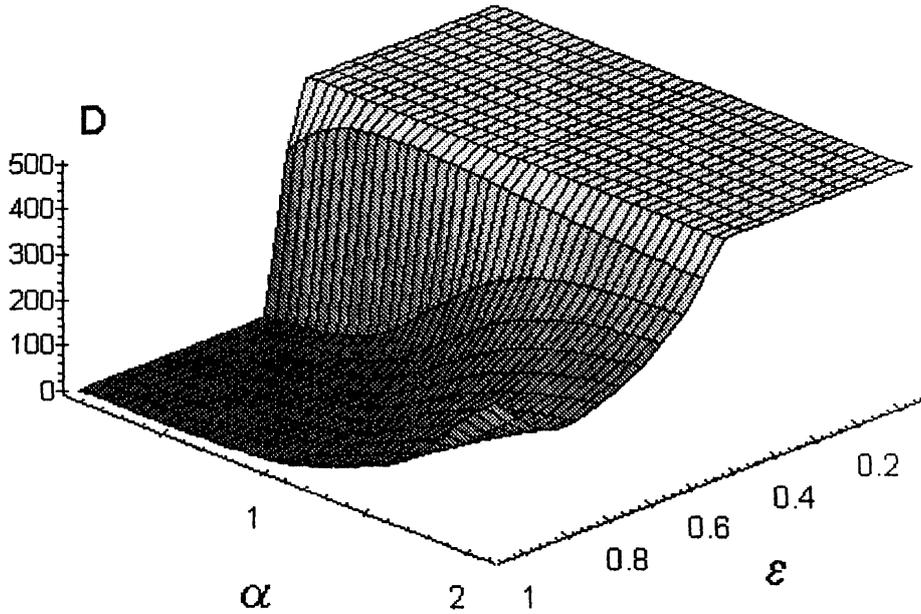


Figura 6.6: Cálculo da dimensão de Lyapunov variando o parâmetro de acoplamento ε e o alcance α . Foi considerado uma rede com 501 mapas $3x$ (módulo 1) e o acoplamento com alcance variável.

6.2 Sincronização de amplitude

A sincronização de amplitude de uma rede de mapas acoplados ocorre quando $x_n^{(1)} = x_n^{(2)} = \dots = x_n^{(N)}$, onde N é o número de sítios da rede. Como diagnóstico para a sincronização de amplitude usaremos o parâmetro de ordem complexo introduzido por Kuramoto (Kuramoto, 1984), e adaptado para rede de mapas acoplados. Para um tempo n o parâmetro de ordem é definido como (Viana, 1998) (Pinto, 2000)

$$z_n = R_n \exp(2\pi i \phi_n) \equiv \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \exp(2\pi i x_n^{(j)}), \quad (6.46)$$

onde R e ϕ são a amplitude e o ângulo, respectivamente, de uma rede com condições de contorno periódicas.

Vamos considerar dois casos limites. Primeiramente todos os sítios da rede com o mesmo valor $x_n^{(j)} = \psi$ ($j = 1, 2, \dots, N$), o que leva a rede a um estado de sincronização total e a apresentar a amplitude do parâmetro de ordem igual a 1. O outro caso limite é a situação em que os valores $x_n^{(j)}$ são espacialmente não correlacionados, e podemos considerar o parâmetro de ordem como um fator

espacial médio

$$z_n = \langle e^{2\pi i x_n^{(j)}} \rangle_{\text{esp.}} = \langle \cos 2\pi x_n^{(j)} \rangle_j + i \langle \text{sen} 2\pi x_n^{(j)} \rangle_j = 0. \quad (6.47)$$

O parâmetro de ordem foi originalmente introduzido para uma cadeia de osciladores descrita por um modelo com o tempo contínuo, em que os estados sincronizados são caracterizados por um valor fixo da amplitude de R (para redes infinitas) ou flutuações em torno deste valor de amplitude proporcional a $1/\sqrt{N}$ (para cadeias finitas). Para estados não sincronizados essas oscilações continuam a ocorrer, mas seu comportamento tem uma periodicidade complexa e o valor médio é menor do que em um estado sincronizado.

Quando todos os sítios de uma rede estão sincronizados em todo instante de tempo, R não oscila com o decorrer das iterações. Mas quando existem sítios que oscilam de maneira irregular e estando na maioria do tempo não sincronizados e outros sincronizados, fazem com que o cálculo da amplitude do parâmetro de ordem também oscile. Os sítios não sincronizados também fazem com que R diminua de valor. A figura (6.7) apresenta a amplitude do parâmetro de ordem R_n para um alto parâmetro de acoplamento $\varepsilon = 1, 0$, onde foram consideradas condições iniciais aleatórias e condições de contorno periódicas. Na figura (6.7a), todos os sítios estão sincronizados em amplitude e R é igual a 1, após um transiente. A figura (6.7b) mostra o caso onde temos determinados intervalos de iterações de sincronização de amplitude com $R_n \approx 1$ e intervalos para os quais o número de sítios sincronizados diminui. Na figura (6.7c) foi usado $\alpha = 2$ para termos o acoplamento local. Mesmo com um parâmetro de acoplamento alto temos um comportamento irregular, próximo de zero, para a amplitude do parâmetro de ordem. No acoplamento local a influência da difusão na rede é pequena, e não é suficiente para superar a desordem da rede devido a caoticidade dos mapas.

A figura (6.8) mostra o cálculo da média do parâmetro de ordem $\langle R \rangle$ variando o acoplamento ε e o alcance α (Batista, 2001 d). Nesta região de sincronização completa ocorre que a média dos expoentes de Lyapunov é positiva e com um valor baixo, sendo que este valor se deve ao fato de que apenas um expoente de Lyapunov é positivo enquanto que os demais $N - 1$ expoentes são negativos. Estes resultados nos levam a conclusão de que no platô de sincronização completa temos sincronização de caos espaço temporal. A sincronização de caos espaço temporal ocorre quando os sítios apresentam os mesmos valores para suas variáveis de estado ($\langle R \rangle = 1$) e exibem um comportamento caótico no tempo ($\lambda_1 > 0$ e $\lambda_i < 0$ com $i = 2, \dots, N$).

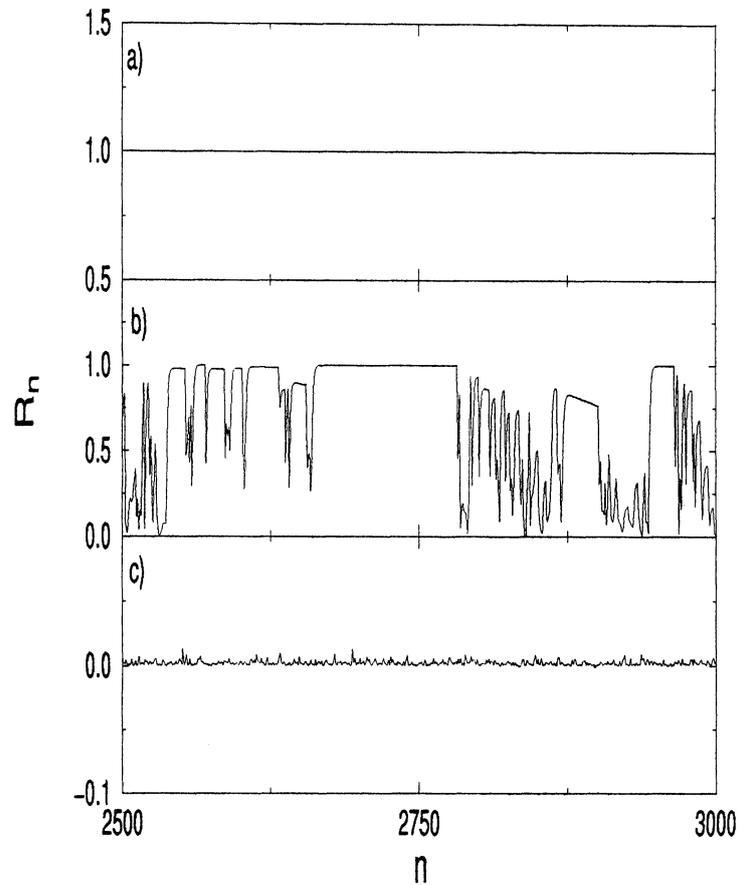


Figura 6.7: Amplitude do parâmetro de ordem para uma rede com 501 mapas acoplados, condições iniciais aleatórias, condições de contorno periódicas, $\varepsilon = 1$ e : (a) $\alpha = 0$, ocorre sincronização completa de amplitude (b) $\alpha = 0,49$, temos um comportamento intermitente para R , (c) $\alpha = 2$, não ocorre sincronização de amplitude.

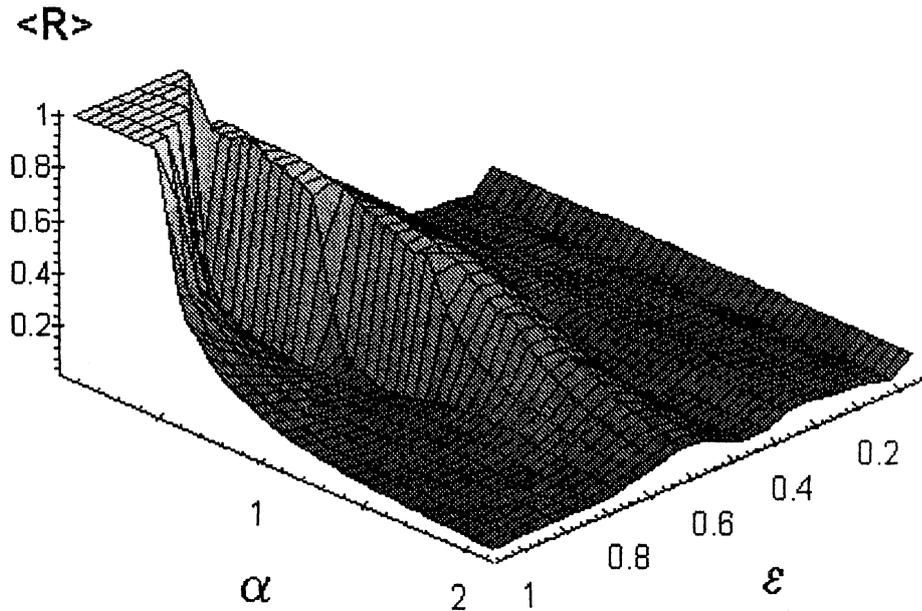


Figura 6.8: $\langle R \rangle \times \epsilon \times \alpha$ para uma rede com 501 mapas (Batista, 2001 d).

6.3 Sincronização de fase

Agora vamos analisar a sincronização de fase onde a amplitude pode permanecer caótica. Esta caoticidade é verificada pela média dos expoentes de Lyapunov positivos e pelo maior expoente de Lyapunov que são positivos para o comportamento caótico. Os estados de fase sincronizados são os estados que mostram máximos (mínimos) locais no mesmo instante de tempo. Na figura (6.9) podemos ver uma rede com 501 mapas que apresenta todos os mapas com amplitude caótica, esta caoticidade é comprovada por h que tem valor 0,0022 e pelo maior expoente de Lyapunov que é igual a $\ln 3$, foi considerado $\alpha = 0,49$, $\epsilon = 1,0$, condições de contorno periódicas e condições iniciais aleatórias.

Já a figura (6.10) exhibe apenas algumas iterações da figura (6.9) que nos permitem ver a sincronização de fase. Da iteração 2972 a 2973 ocorre que todos os sítios estão sincronizados em fase, de 2973 a 2974 alguns permanecem em fase enquanto outros não.

A sincronização de fase ($P_n^{(i)}$) para uma rede unidimensional de mapas acoplados pode ser definida em um tempo n da seguinte forma (Hu, 2000)

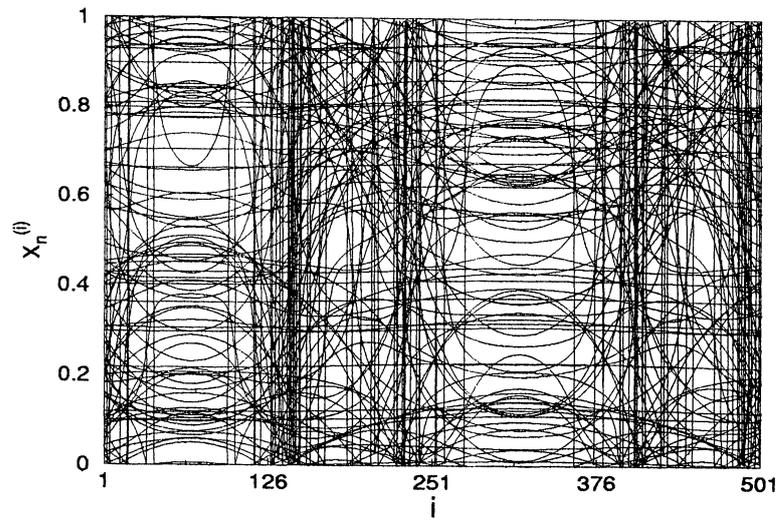


Figura 6.9: $x_n^{(i)}$ versus i para uma rede com 501 mapas. Foi considerado $\alpha = 0,49$, $\varepsilon = 1,0$ e $2900 < n < 3000$.

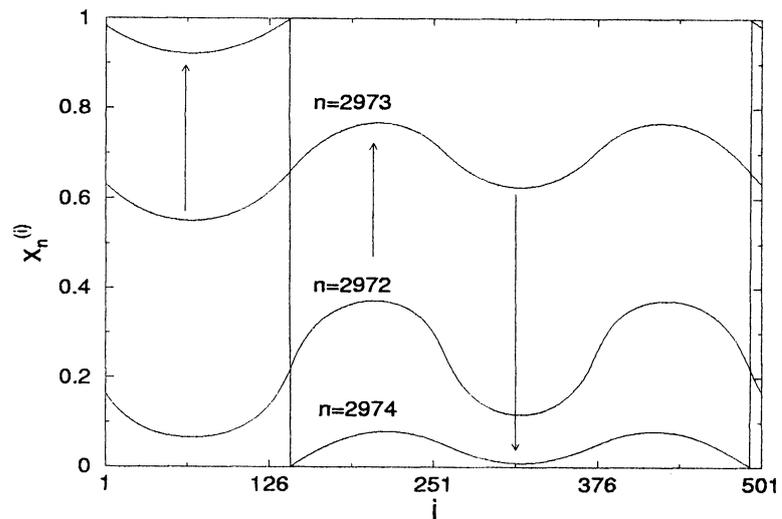


Figura 6.10: i versus $x_n^{(i)}$ para uma rede com 501 mapas. Foi considerado $\alpha = 0,49$, $\varepsilon = 1,0$.

$$P_n^{(i)} = \begin{cases} 1 & \text{se } x_n^{(i)}/x_{n-1}^{(i)} > 1 \\ 0 & \text{outros casos} \end{cases} . \quad (6.48)$$

Usando a definição de $P_n^{(i)}$, podemos ver que todos os sítios da figura (6.10) de $n = 2972$ a $n = 2973$ têm fase 1, de $n = 2973$ a $n = 2974$ alguns têm fase 1 e outros 0. Assim é possível definir uma razão de sincronização de fase ρ como

$$\rho = \frac{1}{N} \max \left[\sum_{i=1}^N (P_n^{(i)} = 1), \sum_{i=1}^N (P_n^{(i)} = 0) \right], \quad (6.49)$$

sendo que $\sum (P_n^{(i)} = 1)$ e $\sum (P_n^{(i)} = 0)$ denotam o número de unidades com fases 1 e 0, respectivamente. Se as fases de todos os sítios mudam alternadamente entre 0 e 1 no decorrer das iterações, esta definição garante que ρ permanece constante. Quando $\rho = 1$ todos os sítios estão fase e quando $\rho = 0,5$ a metade dos sítios da rede estão com fase 1 e a outra metade com fase 0. $\rho = 0,5$ é o menor valor possível para a razão de sincronização. A figura (6.11) mostra o cálculo da razão de sincronização de fase para uma rede com 501 mapas e as mesmas condições usadas na figura (6.9) de $n = 2000$ a $n = 3000$.

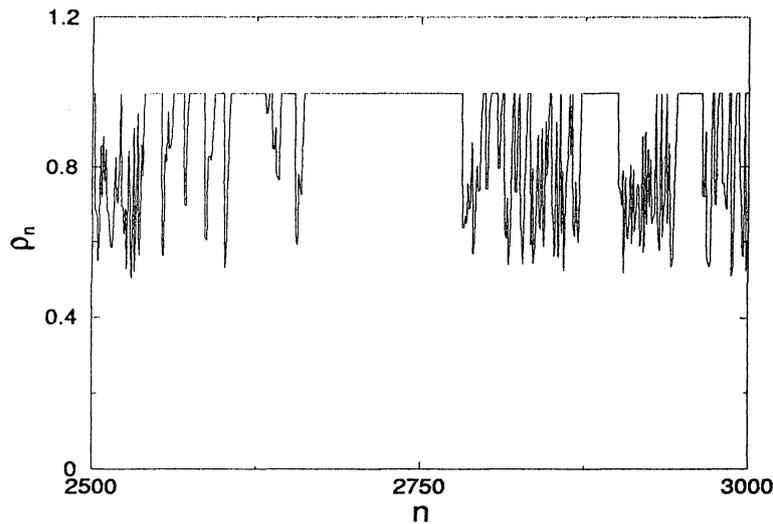


Figura 6.11: ρ_n versus n para uma rede com 501 mapas. Foi considerado $\alpha = 0,49$ e $\varepsilon = 1,0$.

O que se observa na figura (6.11) é que para determinados instantes a rede está completamente sincronizada em fase e outros não. As iterações em

que ocorre a sincronização de fase de todos os sítios formam platôs, os quais têm tamanhos diferentes. Os tamanhos dos platôs correspondem ao número de iterações em que a rede apresenta $\rho = 1$ e consideramos que o menor platô tem tamanho 2. Analisamos o tamanho dos platôs realizando 42000 iterações e desprezamos as 2000 primeiras iterações. O resultado é mostrado na figura (6.12), na qual consideramos 501 mapas, $\alpha = 0,49$ e $\varepsilon = 1,0$. O tamanho dos platôs e a sua quantidade seguem uma lei de potência

$$Q = a\tau^b, \quad (6.50)$$

sendo $a = 1770,832$ e $b = -1,433$. Platôs largos são mais raros, assim contribuem pouco para a estatística, o que é visto nos pontos espalhados para τ grande. Assim o ajuste é melhor para os platôs pequenos.

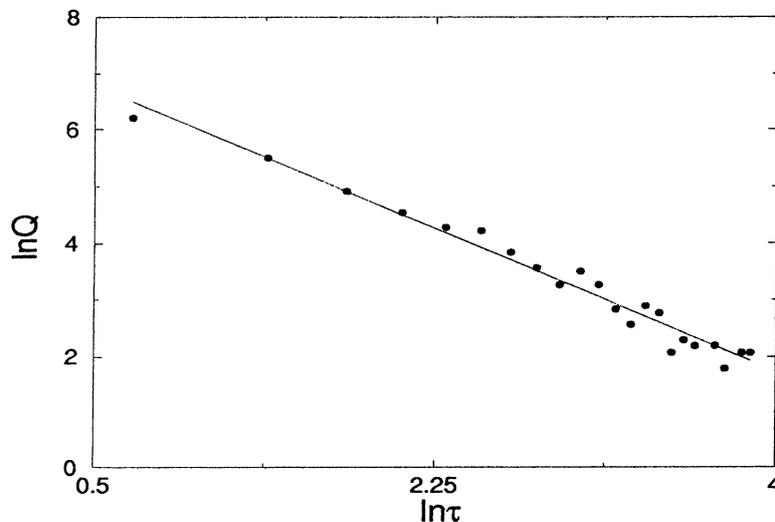


Figura 6.12: Quantidade de platôs versus tamanho do platô para uma rede com 501 mapas. Foi considerado $\alpha = 0,49$, $\varepsilon = 1,0$, 40000 iterações e 2000 desprezadas. Foi possível obter uma lei de potência $Q = a\tau^b$, com $a = 1770,832$ e $b = -1,433$.

Observando a figura (6.11) podemos ver que existe um comportamento intermitente para a sincronização total de fase $\rho = 1$, que é interrompida por regiões com $\rho \neq 1$ (*bursts*) de duração finita. Para analisar esta intermitência vamos calcular a média do tamanho dos platôs $\langle \tau \rangle$, sendo que quando α aproxima-se de um valor crítico α^* o tempo médio entre os *bursts* tende para infinito,

$$\lim_{\alpha \rightarrow \alpha^*} \langle \tau(\alpha) \rangle = \infty, \quad (6.51)$$

e a rede de mapas acoplados torna-se totalmente sincronizada em fase. Quando α aumenta acima de α^* , os *bursts* tornam-se cada vez mais regulares até o momento em que não há mais platôs.

A figura (6.13) mostra o comportamento do tamanho médio dos platôs em relação ao alcance α . Foi considerado $\varepsilon = 1,0$, $N = 501$ e a média foi calculado para 7000 iterações com 3000 iterações transientes. Pelos valores calculados pudemos obter a seguinte relação

$$\langle \tau \rangle = c(\alpha - \alpha^*)^d, \quad (6.52)$$

sendo $\alpha^* = 0,48$, $c = 0,783$ e $d = -0,695$.

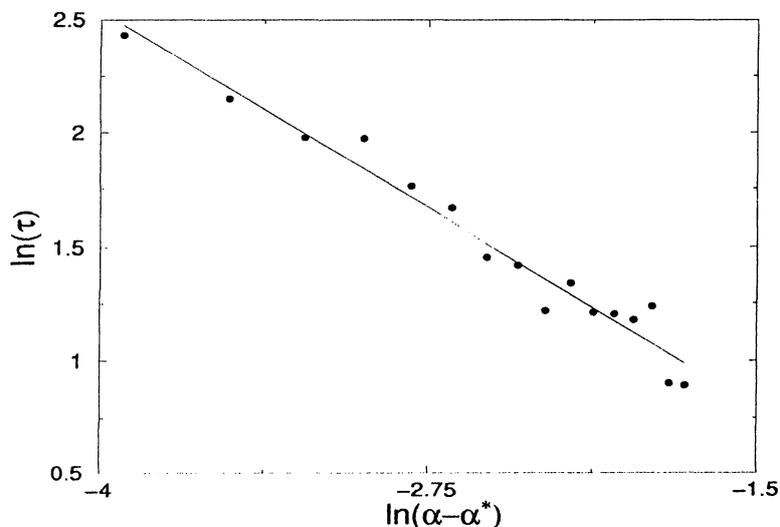


Figura 6.13: Reta $\langle \tau \rangle = c(\alpha - \alpha^*)^d$ com $\alpha^* = 0,48$, $c = 0,783$ e $d = -0,695$. Os pontos foram obtidos para a rede de mapas acoplados para $\varepsilon = 1,0$ e $N = 501$.

Variando o acoplamento ε e o alcance α calculamos o valor médio de ρ no intervalo de iterações $4000 < n \leq 5000$. A figura (6.14) mostra o cálculo para $0 < \varepsilon < 1$ e $0 < \alpha < 2$ com incremento igual a 0,05 para ambos os intervalos. O platô para $\langle \rho \rangle = 1$ significa que temos todos os sítios da rede sincronizados em fase. Comparando a figura (6.14) com a figura (6.5) podemos ver que a sincronização total de fase ocorre para o caso de valores baixos para a média dos expoentes de Lyapunov positivos. Isto quer dizer que a sincronização de fase da rede inteira, quando os sítios são caóticos, ocorre quando a rede apresenta caos fraco. Após o platô $\langle \rho \rangle = 1$ os valores de $\langle \rho \rangle$ caem para, aproximadamente, 0,5, sendo que este valor representa que a rede está completamente fora de sincronização de fase. Ocorre um aumento

do valor de ρ médio e R médio nas proximidades de ε igual a 0,6, no intervalo $0 < \alpha < 1,5$. Este aumento é devido a diminuição do número de expoentes de Lyapunov positivos. Mas como não há somente um expoente de Lyapunov positivo nesta região, não ocorre sincronização de caos e o valor de ρ e R não será igual a um.

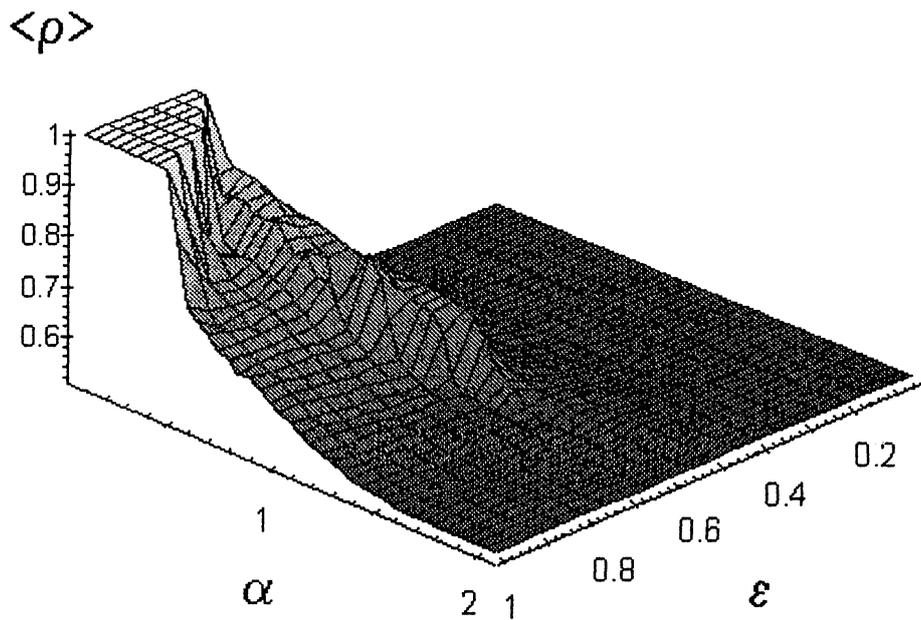


Figura 6.14: $\langle \rho \rangle \times \varepsilon \times \alpha$ para uma rede com 501 mapas.

Capítulo 7

Redes de Mundo Pequeno

Estima-se que a população do mundo excede 6 bilhões de pessoas, e não há dúvida de que a população cresceu rapidamente nos últimos anos. Apesar do enorme número de pessoas no planeta, a estrutura das redes sociais é tal que estamos proximamente conectados a outras pessoas (Watts, 1999).

Um dos primeiros estudos quantitativos da estrutura de redes sociais foi realizado na década de 1960 por Stanley Milgram da Universidade de Harvard (Milgram 1967). Milgram pegou um número de cartas endereçadas a um conhecido corretor de valores em Boston, Massachusetts, e distribuiu aleatoriamente a pessoas em Nebraska. As instruções eram que as cartas estavam sendo enviadas ao corretor de valores passando de pessoa em pessoa, e que uma pessoa só poderia passar para uma outra se soubesse, pelo menos, o primeiro nome.

Um razoável número de cartas de Milgram, eventualmente, chegaram ao seu destino, e Milgram encontrou que elas tinham levado em média seis passos para irem de Nebraska a Boston. Ele concluiu, sem se preocupar com exatidões experimentais, que seis era portanto o número médio de conhecidos separando as pessoas, e conjecturou que uma separação similar pode caracterizar o relacionamento de duas pessoas no mundo todo. Esta situação tem sido classificada como *seis graus de separação* (Guare, 1990).

Dado a forma do experimento de Milgram, pode-se dizer que o número seis não é provavelmente um valor preciso. O experimento certamente contém muitas fontes possíveis de erro. Entretanto, o resultado geral de que duas pessoas escolhidas aleatoriamente podem ser conectadas por uma cadeia curta de conhecidos tem sido verificado, e atualmente bastante aceito e referido como efeito de *mundo pequeno* (Newman, 2000).

O efeito de mundo pequeno aparece em outras redes, como por exem-

plo o jogo de Kevin Bacon. Kevin Bacon é um artista que não foi o ator principal de muitos filmes. Bett Tjade, levou Kevin Bacon ao reconhecimento internacional com a criação de seu jogo: *Os seis graus de Kevin Bacon*. O jogo consiste em se pensar em um ator ou atriz, e se ele atuou em um filme com Kevin Bacon, então ele apresenta um número de Bacon que é um. Se ele nunca filmou com Kevin Bacon, mas atuou com alguém que trabalhou com Bacon, então ele tem um número dois, e assim por diante. Elvis Presley, por exemplo, tem número de Bacon igual a dois. Tjaden, usando a internet, determinou que o maior número de Bacon, para qualquer nacionalidade, é oito (Tjaden e Wasson, 1997).

7.1 Modelo de redes de Mundo Pequeno

Uma explicação simples para o efeito de mundo pequeno usa a idéia de um gráfico aleatório. Suponhamos que há um número N de pessoas no mundo, e na média elas têm z conhecidos. Isto significa que há $Nz/2$ conexões entre as pessoas em todo o mundo. O número z é chamado de número de coordenação de uma rede.

É possível fazer um modelo simples de rede social pegando N pontos (nodos ou vértices) e desenhando $Nz/2$ linhas (lados) entre pares escolhidos aleatoriamente para representar essa conexão. Tal rede é chamada de gráfico aleatório (Bollobás, 1985). Gráficos aleatórios têm sido estudados pela comunidade matemática, particularmente por Erdos e Rényi (Erdos, 1959). Os gráficos aleatórios mostram o efeito de mundo pequeno (Gade, 1996). Se uma pessoa A em tal gráfico tem z vizinhos, e cada um dos vizinhos de A também tem z vizinhos, então A tem em torno de z^2 segundos vizinhos. Extendendo este argumento, A também tem z^3 terceiros vizinhos, z^4 quartos vizinhos, e assim por diante. A maioria das pessoas tem entre cem a mil conhecidos, assim z^4 está entre 10^8 e 10^{12} , que é comparável a população do mundo. Em geral, o número D de graus de separação que precisamos considerar para atingir, em ordem, toda as N pessoas de uma rede (também chamado de diâmetro de gráfico) é dado por $z^D = N$, que implica em $D = \log N / \log z$. Este logaritmo aumenta no número de graus de separação com o tamanho da rede consistindo em um efeito de mundo pequeno.

Há um problema significativo com o gráfico aleatório como modelo para redes sociais. O problema é que os amigos de seus amigos são, provavelmente, seus amigos, ou dois de seus amigos podem ser amigos um do outro. Isto significa que em redes sociais reais não é verdade dizer que A tem z^2 segundos vizinhos, desde que muitos dos amigos de amigos são amigos da pessoa A . Esta propriedade é chamada de agrupamento de redes.

Um gráfico aleatório não exhibe agrupamento, e redes reais apresentam

agrupamentos. Define-se um coeficiente de agrupamento C , que é a fração média de pares de vizinhos de um nodo que são vizinhos de outros. Em uma rede completamente conectada, em que todos conhecem todos, temos $C = 1$, e em gráfico aleatório $C = z/N$, que é muito pequeno para uma rede grande. Em redes de mundo reais têm sido encontrado que C é significativamente menor do que 1, mas muito maior do que $O(N^{-1})$. Na tabela (7.1) são mostrados alguns valores para C calculados por Watts e Strogatz (1998) para duas redes diferentes: uma rede de atores de filmes de cinema e uma rede neural da minhoca *Caenorhabditis Elegans*. Também é mostrado o valor de $C(\text{aleat.})$ e a distância média l entre pares de nodos. l não é a mesma coisa que o diâmetro D da rede, que é a máxima distância entre os nodos, mas também escala logicamente com o número de nodos em gráficos aleatórios. Como a tabela (7.1) mostra, os valores de l nas redes consideradas são pequenos, indicando o efeito de mundo pequeno. A definição precisa de efeito de mundo pequeno é ainda uma matéria em debate, mas é razoável a definição de que l seja comparável com o valor apresentado pelos gráficos aleatórios (Newman, 2000).

Redes	N	l	C	C(aleat.)
atores de filmes	225226	3,65	0,79	0,00027
rede neural	282	2,65	0,28	0,05

Tabela 7.1: Valores calculados por Watts e Strogatz (1998).

Como gráficos aleatórios não apresentam agrupamentos, Watts e Strogatz (Watts, 1998) propuseram um modelo alternativo para mundo pequeno. Eles sugeriram uma rede unidimensional com condições de contorno periódicas, como mostra a figura (7.1), onde ocorre uma reconexão aleatória, com uma probabilidade p . Para p pequeno a rede apresenta poucas conexões entre nodos distantes.

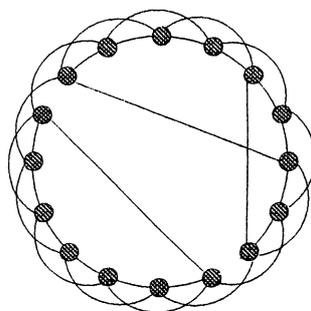


Figura 7.1: Modelo de mundo pequeno proposto por Watts e Strogatz (1998) para $z = 4$.

Os valores do coeficiente de agrupamento C para o modelo Watts-

Strogatz com valores baixos de p são próximos da rede perfeitamente ordenada. Watts e Strogatz mostraram por simulações numéricas que a distância média vértice-vértice l é comparável com o gráfico aleatório, para valores pequenos de p . Por exemplo, para um gráfico aleatório com $N = 1000$ e $z = 10$, eles encontraram uma distância média l em torno de 3,2 entre dois vértices escolhidos aleatoriamente. Para o modelo de reconexões, a distância média foi somente um pouco maior, $l = 3,6$, usando $p = 1/4$, sendo que sem as reconexões obtiveram $l = 50$. Para $p = 1/64 = 0,0156$, encontraram $l = 7,4$, um pouco mais que o dobro do valor do gráfico aleatório. Assim, o modelo mostra agrupamento e propriedades de mundo pequeno, simultaneamente.

O problema no modelo Watts-Strogatz é que existe uma probabilidade finita de que uma porção da rede fique separada do restante. Pode-se representar este modelo dizendo que a distância de tal porção a um vértice na rede é infinita. Isto significa que a distância média vértice-vértice sobre a rede é infinita. Este problema pode ser contornado fazendo uma modificação, proposta por Newman e Watts (Newman, 1999). Neste novo modelo continua existindo as conexões aleatórias com uma determinada probabilidade, sendo que a modificação consiste em não se quebrar a ligação entre os vizinhos próximos. O modelo é equivalente ao modelo Watts-Strogatz para uma probabilidade baixa.

7.2 Sincronização

Como no modelo Watts-Strogatz há a possibilidade de que a rede seja quebrada em agrupamentos não correlacionados, usaremos o modelo modificado de Newman e Watts (Newman, 1999) para analisar a sincronização de mapas acoplados por meio do mundo pequeno. Neste modelo usaremos um anel unidimensional com N sítios. Cada sítio i está conectado aos seus vizinhos $i + 1$, $i - 1$ e ainda a outros sítios determinados aleatoriamente com uma probabilidade p . As conexões com os sítios $i + 1$ e $i - 1$ não são quebradas.

A rede de mapas acoplados é dada por

$$x_{n+1}^i = \frac{1}{2 + \kappa} \left[f(x_n^{i-1}) + f(x_n^{i+1}) + \sum_{j=1}^N I_{i,j} f(x_n^j) \right], \quad (7.1)$$

sendo κ o número de conexões aleatórias e $I_{i,j}$ a matriz conexão não simétrica que é formada por elementos iguais a 0 ou 1, distribuídos aleatoriamente. Quando o elemento é igual a 1 ocorre a conexão entre os sítios i e j de maneira unidirecional.

Definindo uma probabilidade p igual a κ/N , temos que para $p = 0$ o acoplamento é local com parâmetro de acoplamento ε igual a 1 e para $p = 1$ temos o acoplamento global. Por exemplo, vamos considerar uma rede com $N = 5$ e $\kappa = 2$ ($p = 2/5$), que fornece a seguinte matriz conexão

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (7.2)$$

O mapa que consideraremos para a análise é o mapa do seno-círculo dado pela relação

$$x_{n+1} = f(x_n) = x_n + \Omega - \frac{K}{2\pi} \text{sen}(2\pi x_n) \pmod{1}, \quad (7.3)$$

este mapa foi proposto por Arnold em 1965 (Arnold, 1965) para analisar o que ocorre com um movimento quase periódico se um termo não linear ($K > 0$) é adicionado a um mapa da forma $x \rightarrow x + \Omega$, sendo que $0 \leq \Omega \leq 1$ é a frequência natural. O último mapa, por exemplo, pode modelar dois osciladores periódicos, onde x_n é a fase de um dos osciladores depois que o outro tenha realizado uma oscilação, e Ω é a razão entre as frequências dos dois osciladores (Arrowsmith, 1996). Se a frequência Ω é irracional o movimento é quase periódico, e se Ω é um racional da forma p/q o movimento é periódico com período q .

Se $K < 1$ o mapa (7.3) é sempre inversível, e os únicos movimentos que existirão serão os periódicos e os quase periódicos, com as correspondentes regiões estando densamente entrelaçadas no espaço de parâmetros. Se $K > 1$ o mapa é não inversível e pode apresentar comportamento caótico.

Analisaremos a sincronização de frequência para o caso de $K < 1$, onde não ocorre o aparecimento de comportamento caótico. Consideramos que dois ou mais mapas estão sincronizados em frequência se os seus números de rotação ω (*winding number*) são iguais, sobre uma determinada tolerância (Viana, 1998) (Pinto, 2000) (Pinto, 2001). O número de rotação é obtido através da seguinte relação

$$\omega^{(i)} = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m - m_0} \sum_{n=m_0}^{m-1} |x_{n+1}^{(i)} - x_n^{(i)}|, \quad (7.4)$$

sendo que m_0 é o número de iterações transientes.

A figura (7.2) mostra o número de rotação de uma rede com 200 mapas do seno-círculo acoplados usando o acoplamento dado pela relação (7.1), $K = 0,25$, condições de contorno periódicas, condições iniciais aleatórias e $\Omega^{(i)}$ é distribuído aleatoriamente no intervalo entre zero e um. Na figura (7.2a) consideramos $\kappa = 0$, que faz com que não hajam conexões aleatórias e fornece $p = 0/200 = 0$. Neste caso temos o acoplamento local laplaciano para o parâmetro de acoplamento ε igual a 1. Esta situação foi estudada por Pinto e Viana (Pinto, 2000), que verificaram que não ocorre sincronização de frequência. Na figura (7.2b) usamos $\kappa = 6$, ou seja, seis conexões aleatórias que fornecem $p = 6/200 = 0,03$, e observamos que uma grande parte dos sítios (mais de 90%) sincronizam com frequência em torno de 0,5. Os números de rotação foram obtidos considerando 2000 iterações transientes e m igual a 5000. Na figura (7.2b), os números de rotação também foram calculados para 200000 iterações transientes e $m = 210000$ e forneceram exatamente os mesmos resultados. O que acarretou alterações nos resultados foi a modificação na configuração da matriz conexão, já que ela não é simétrica. A alteração consiste nas posições e número de sítios que sincronizam, permanecendo a grande maioria sincronizados.

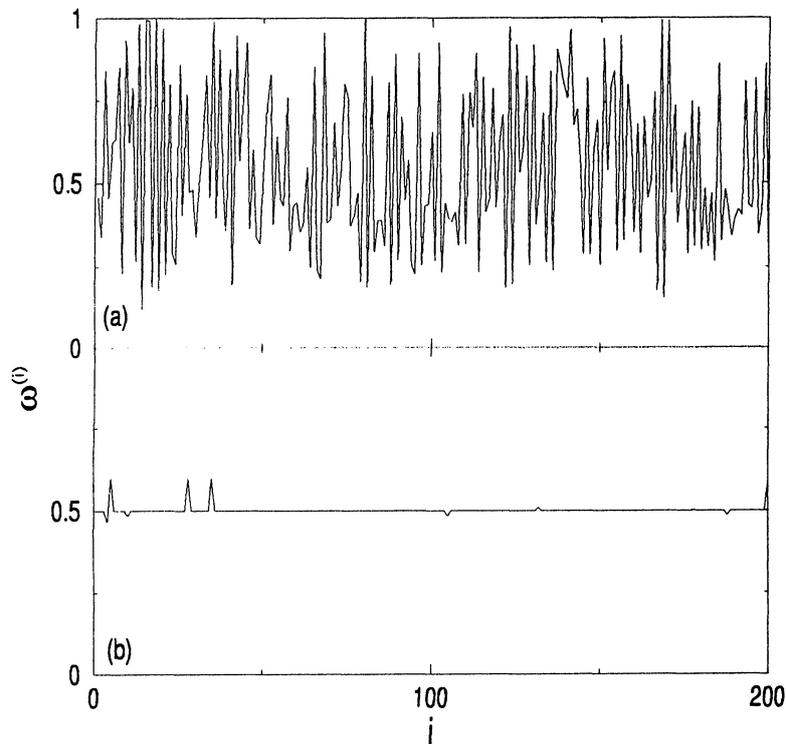


Figura 7.2: Número de rotação de uma rede com 200 mapas do seno-círculo acoplados usando o acoplamento dado pela relação (7.1), $K = 0,25$, condições de contorno periódicas, condições iniciais aleatórias e $\Omega^{(i)}$ é distribuído aleatoriamente no intervalo entre zero e um. (a) $p = 0$ e (b) $p = 0,03$.

Para analisar a sincronização de frequência com relação a probabilidade p calcularemos a dispersão do número de rotação $\delta\omega$ em torno de $\langle \omega \rangle = 0,5$, dada pelo desvio padrão

$$\delta\omega = \left[\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\omega^{(i)} - \langle \omega \rangle)^2 \right]^{1/2}. \quad (7.5)$$

Para $\delta\omega = 0$ não há dispersão, e isto só ocorre quando todos os números de rotação têm o mesmo valor, caso contrário, $\delta\omega > 0$. Na medida em que os números de rotação tornam-se mais dispersos em torno de $\langle \omega \rangle$, $\delta\omega$ aumenta. Podemos ver, por meio da figura (7.3) o cálculo da média da dispersão do número de rotação de uma rede com 200 mapas do seno-círculo acoplados usando a equação (7.5), $K = 0,25$, condições de contorno periódicas, condições iniciais aleatórias e $\Omega^{(i)}$ é distribuído aleatoriamente no intervalo entre zero e um. A média é calculada sobre 5 configurações da matriz conexão. A média também foi calculada para 30 configurações e forneceu, aproximadamente, o mesmo resultado. No intervalo $0,035 \leq p \leq 0,075$ a média da dispersão é da ordem de 10^{-2} e no intervalo $0,08 \leq p \leq 0,2$ temos uma dispersão média da ordem de 10^{-3} .

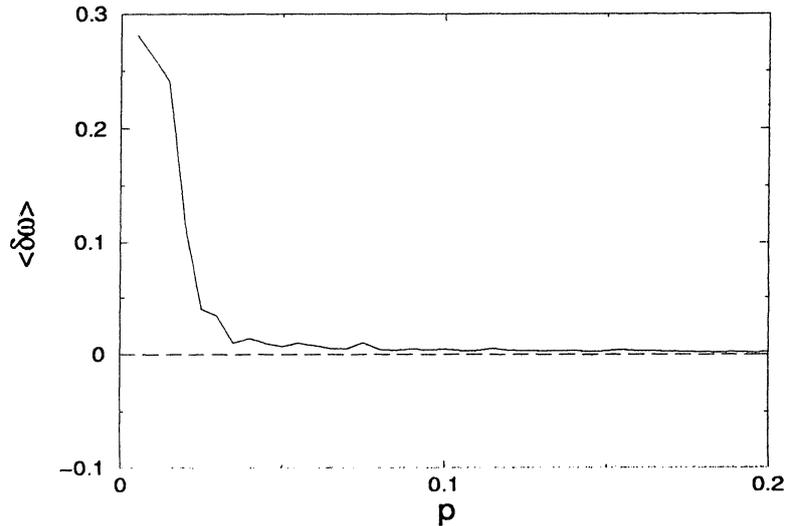


Figura 7.3: Média da dispersão do número de rotação de uma rede com 200 mapas do seno-círculo acoplados usando a equação (7.5), $K = 0,25$, condições de contorno periódicas, condições iniciais aleatórias e $\Omega^{(i)}$ é distribuído aleatoriamente no intervalo entre zero e um. A média é calculada sobre 5 configurações da matriz conexão.

Logo, para $K < 1$ é possível observar a sincronização de frequência, que não ocorria para $p = 0$, inserindo conexões aleatórias na rede.

Capítulo 8

Conclusões

A caracterização de dinâmicas complexas é um dos problemas mais estudados na atualidade, sendo a existência de regimes caóticos em sistemas com poucos graus de liberdade um grande incentivo nesta direção. É visto que certas dinâmicas complexas não são observadas em sistemas com poucos graus de liberdade, e para o estudo de tais dinâmicas pode-se usar modelos de sistemas acoplados. Nosso trabalho é baseado em sistemas acoplados.

Primeiramente, consideramos redes de mapas acoplados com o intuito de analisar a formação de memórias em um sistema dinâmico com muitos graus de liberdade. O sistema, uma simples equação de difusão discretizada, armazena memórias após um transiente. Esta possibilidade foi recentemente explorada para explicar o experimento de uma onda de densidade de carga (*CDW*) em $NbSe_3$ em que a memória é manifestada como a sincronização da resposta a pulsos elétricos periódicos. Uma rede de mapas acoplados foi proposta para explicar a existência da formação de memórias de curta duração. Isto significa que a rede armazena uma sequência de pulsos por um curto espaço de tempo e posteriormente perde quase toda a informação. O sistema é deterministicamente forçado para um ponto fixo. Uma vez que este ponto é atingido, é impossível recuperar as memórias de curta duração. É possível manter as memórias transientes adicionando um ruído ao sistema e múltiplas memórias são observadas em amostras de $NbSe_3$, quando é feito um arranjo que induz ruído ao experimento.

Analisando o acoplamento (3.1) para um mapa isolado da forma (3.2) verificamos a formação de memórias ou padrões. Para uma não linearidade nula ($r = 0$) temos a formação de memórias. Considerando uma sequência periódica de pulso de amplitude A , observamos que o número de iterações para que um sítio atinja a última memória varia: com a posição do sítio de acordo com um polinômio de quarta ordem, com o inverso da constante de acoplamento k e com a quinta potência de A . Logo, para uma otimização da armazenagem de tais memórias devemos tomar

uma rede de tamanho pequeno, um parâmetro de acoplamento alto e uma intensidade de pulso baixa.

Para $r > 0$ ocorrem alterações nos valores das memórias. Estas alterações aparecem devido ao surgimento da sincronização entre os sítios. Os sítios que sincronizam apresentam o valor da variável de curvatura nulo. A não linearidade também ocasiona uma redução no número de iterações para que os sítios atinjam a memória permanente. O resultado mais significativo para o caso de mapas com uma não linearidade baixa é a possibilidade de podermos armazenar mais do que uma memória permanente. Obtivemos equações que fornecem os valores das perturbações externas e dos parâmetros de acoplamento que levam a padrões desejados (Batista, 2000).

Na sequência estudamos a formação de memórias em uma rede de circuitos RL acoplados indutivamente. Como modelo para o estudo foi usada uma rede de equações diferenciais e uma rede de mapas acoplados, as quais foram adimensionalizadas. Os mecanismos de formação de memórias, que usamos, é baseado nos trabalhos de Coppersmith, et. al (Coppersmith, 1997) e Batista, Viana e Lopes (Batista, 2000), que usaram como sistema N partículas conectadas por molas e a variável de curvatura, que consiste na memória, foi definida em função das diferenças de alongação das molas. Como o sistema consiste em circuitos acoplados, definimos a variável de curvatura em função das diferenças das amplitudes da corrente adimensional devido as oscilações.

Com as equações diferenciais, obtidas dos circuitos, foi possível encontrar múltiplas memórias. Através destas memórias conseguimos armazenar padrões em uma rede de quadrados, onde cada quadrado representa um intervalo de valores para a variável de curvatura. Variando as perturbações externas encontramos diferentes padrões. Os padrões obtidos representam as letras do alfabeto, números e sinais de pontuação seguindo o método Braille, que foi escolhido por usar uma matriz com 6 elementos. A figura (4.7) mostra alguns símbolos e os respectivos valores para as perturbações externas.

Tanto as equações diferenciais como os mapas acoplados, obtidos a partir dos circuitos, fornecem os mesmos resultados, desde que a frequência adimensional ω' seja menor do que 1. Com a discretização foi possível obtermos uma equação que permite calcular os valores das perturbações externas que nos dá um padrão desejado. Logo, podemos escolher um padrão alvo para memorizar e variar as perturbações para conseguir o resultado desejado. Com redes maiores, outros e mais complexos símbolos podem ser armazenados (Batista, 2001 b).

Estudamos o espectro de Lyapunov de mapas acoplados utilizando o acoplamento de alcance variável. O espectro de Lyapunov são os expoentes de

Lyapunov ordenados em ordem decrescente, sendo que os expoentes de Lyapunov são dados pelos logaritmos dos autovalores do produto de matrizes Jacobianas do sistema, dividido pelo número de iterações consideradas.

Usando o mapa quadrático, observamos que a média dos expoentes de Lyapunov positivos e o maior expoente de Lyapunov dependem do parâmetro de acoplamento e do alcance de uma maneira não trivial. Na situação da transição da supressão de caos no caso global para caos espaço temporal no caso local, encontramos uma lei de potência para a média dos expoentes de Lyapunov positivos e uma função exponencial para o maior expoente de Lyapunov. Esta transição ocorre via intermitência espaço temporal. Nos casos extremos de $\alpha = 0$ e $\alpha \rightarrow \infty$ nossos resultados estão de acordo com os diagramas de fase já conhecidos na literatura, mostrando, também, a transição da média dos expoentes de Lyapunov positivos entre estes dois casos (Batista, 2001 a).

Também, calculamos a média dos expoentes de Lyapunov positivos para uma rede de mapas βx acoplados, usando o acoplamento com alcance variável. O objetivo de calcularmos o espectro de Lyapunov é para verificarmos a caoticidade do sistema por meio da média dos expoentes positivos, e estudarmos a sincronização usando o acoplamento com alcance variável. A sincronização que analisamos é a de fase e amplitude.

Para o mapa βx acoplado localmente e globalmente é possível obter analiticamente os expoentes de Lyapunov. No caso global, obtivemos uma relação para a média dos expoentes de Lyapunov positivos quando ocorre a sincronização de caos. Já no caso local, encontramos que para um acoplamento fraco, a média dos expoentes positivos diminui de um valor máximo (igual ao expoente de Lyapunov dos mapas desacoplados) e atinge um valor mínimo para um acoplamento intermediário. Depois começa a aumentar novamente. Este vale de menor caoticidade é relacionado a padrões espaço temporais caracterizados por caos fraco, seleção de padrões ou propagação de defeitos. Com o aumento do parâmetro de acoplamento, a partir de zero, o espectro de Lyapunov desloca-se para baixo e depois de um dado valor crítico vários expoentes ficam negativos ocasionando uma diminuição no valor da média dos expoentes positivos. Devido ao módulo existente na fórmula do espectro de Lyapunov, com o aumento do parâmetro de acoplamento alguns expoentes negativos passam a ser positivos, o que ocasiona um aumento na média dos expoentes positivos. Obtivemos aproximações analíticas para a média dos expoentes de Lyapunov positivos, para o acoplamento fraco e forte, que estão de acordo com os resultados numéricos (Batista, 2001 c).

Os estados de fase sincronizados são os estados que mostram máximos (mínimos) locais no mesmo instante de tempo. Usando a definição de razão de sincronização, observamos que em determinados instantes, uma rede com 501 mapas, $\beta = 3$, $\alpha = 0,49$ e $\varepsilon = 1,0$, o sistema está completamente sincronizado e em outros

instantes não. As iterações em que ocorre a sincronização de fase de todos os sítios formam platôs nos gráficos $n \times \rho$. O tamanho dos platôs corresponde ao número de iterações em que temos $\rho = 1$. Verificamos que o tamanho dos platôs e a sua quantidade seguem uma lei de potência.

Considerando uma rede com 501 mapas, $\beta = 3$, $\varepsilon = 1,0$ e variando o alcance α observamos a existência de comportamento intermitente para a sincronização total de fase $\rho = 1$, que é interrompida por regiões com ρ diferente de 1 (*bursts*) de duração finita. Para estudar esta intermitência calculamos o tamanho médio dos platôs $\langle \tau \rangle$, sendo que quando α aproxima-se de um valor crítico α_c o tempo médio entre os *bursts* tende para infinito, e a rede fica totalmente sincronizada em fase. Logo, obtivemos que o tamanho médio dos platôs em relação ao alcance α obedece uma relação da forma $\langle \tau \rangle = a(\alpha - \alpha^*)^b$, com $\alpha^* \approx 0,48$.

A sincronização de amplitude é caracterizada com a ajuda da magnitude parâmetro de ordem. Se a magnitude é constante ou flutua em torno de um valor próximo de 1 significa que os mapas estão sincronizados. Para um alcance baixo a rede não sincroniza, e quando o alcance aumenta ocorre que aumentando o parâmetro de acoplamento a rede torna-se mais coerente, embora não completamente sincronizada. Para um acoplamento forte há sincronização completa, tanto de fase como de amplitude, quando nos aproximamos do caso globalmente acoplado. Neste caso de sincronização completa, verificamos uma diminuição na média dos expoentes de Lyapunov positivos. Isto ocorre porque temos um expoente de Lyapunov positivo e os demais negativos, o que caracteriza a sincronização de caos (Batista, 2001 d).

Analisamos a sincronização de uma rede de mapas do seno-círculo usando interações da forma de mundo pequeno. Para isto escolhemos o modelo de Newman e Watts, o qual apresenta conexões aleatórias sem a quebra das conexões locais. Primeiramente consideramos $K < 1$ e distribuímos Ω aleatoriamente entre 0 e 1. A caracterização é feita pelo número de rotação. Já tinha sido verificado por Pinto e Viana (Pinto, 2000) que sem conexões aleatórias não ocorre nenhuma forma de sincronização. Mas nós observamos, utilizando conexões aleatórias e uma rede com 200 mapas do seno-círculo, sincronização de frequência. No intervalo $0,035 \leq p \leq 0,075$ a média da dispersão do número de rotação é da ordem de 10^{-2} e no intervalo $0,08 \leq p \leq 0,2$ temos uma dispersão média da ordem de 10^{-3} .

Bibliografia

Alligood, K. T., Sauer, T. D. e Yorke, J. A. (1997): *Chaos an introduction to dynamical systems*, Springer-Verlag New York, Inc.

Arnold, V. I. (1965), Am. Math. Soc. Trans. **46**, 213.

Arrowsmith, D. K., Lansburry, A. N. e Mondragón (1996), Int. J. Bifurcation Chaos Appl. Sci. Eng. **6**, 437.

Batista, A. M. (1996): *Mapas acoplados na rede e sincronização*, Dissertação de Mestrado, Universidade Federal do Paraná, não publicada.

Batista, A. M., Viana, R. L. e Lopes, S. R. (2000): *Multiple short-term memories in coupled weakly nonlinear map lattices*, Physical Review E, **61**, 5.

Batista, A. M. e Viana, R. L. (2001) (a): *Lyapunov exponents of a lattice of chaotic maps with a power-law coupling*, Physics Letters A, **286**, 134.

Batista, A. M. e Viana, R. L. (2001) (b): *Short-term memories in lattices of inductively coupled AC-driven circuits*, aceito na Physica A.

Batista, A. M. e Viana, R. L. (2001) (c): *Kolmogorov-Sinai entropy for locally coupled piecewise linear maps*, submetido a Physica A.

Batista, A. M., Pinto, S. E. de S., Lopes, S. R. e Viana, R. L. (2001) (d): *Chaos and synchronization in piecewise linear map lattices with power-law coupling*, submetido a Physical Review E.

Bollobás, B. (1985): *Random graphs*, Academic Press (New York).

Bricmont, J. e Kupiainen, A. (1997), Physica D, **103**.

Carlson, J. M. e Langer, J. S. (1989): *Properties of earthquakes generated by fault*

dynamics, Physical Review Letters, **62**, 22, 2632 .

Chaté, H. e Manneville, P. (1988): *Spatio-temporal intermittency in coupled map lattices*, Physica D, **32**, 409.

Chaté, H. e Manneville, P. (1992), Chaos, **2**, 307.

Coppersmith, S. N. e Littlewood, P. B. (1987): *Pulse-duration memory effect and deformable charge-density waves*, Physical Review B, **36**, 311.

Coppersmith, S. N., Jones, T. C., Kadanoff, L. P., Levine, A., McCarten, J. P., Nagel, S. R., Venkataramani, S. C. e Wu, X. (1997): *Self-organized short-term memories*, Physical Review Letters, **78**, 21, 3983.

Crutchfield, J. P. e Kaneko, K. (1987): *Phenomenology of spatiotemporal chaos*, in: *Directions in chaos*, **1**, Ed. Hao Bai-lin, World Scientific, Singapore.

Davis, P. J. (1979): *Circulant Matrices*, Wiley-Interscience, New York.

Ding, E. J. (1987): *Analytical treatment of a driven oscillator with a limit cycle*, Physical Review A, **35**, 2669.

Ding, E. J. (1987): *Structure of the parameter space for a prototype nonlinear oscillator*, Physical Review A, **36**, 1488.

Erdos, P. e Rényi, A. (1959): *On random graphs*, Publicationes Mathematicae, **6**, 290.

Gade, P. M. (1996): *Synchronization of oscillators with random nonlocal connectivity*, Physical Review E, **54**, 1, 64.

Gade, P. M. e Hu, C. K. (2000): *Synchronous chaos in coupled map lattices with small-world interactions*, Physical Review E, **62**, 5, 6409.

Gong, X., Chen, H. e Li, F. (1998): *Controlling and synchronization of spatio-temporal patterns of a globally coupled chaotic map*, Physics Letters A, **237**, 217.

Gradshtey, S. e Ryzhik, I. M. (1994): *Table of Integrals, Series and Products*, 5th. Ed., Academic Press.

Guare, J. (1990): *Six degrees of separation: A play*, Vintage (New York).

Herz, A. V. M. e Hopfield, J. J. (1995): *Earthquake cycles and neural reverberations:*

Collective oscillations in systems with pulse-coupled threshold elements, Physical Review Letters, **7**, 6, 1222.

Hopfield, J. J. (1982), Proc. Natl. Acad. Sci. USA **79**, 2554; Hopfield, J. J. e Tank, D. W. (1986), Science, **233**, 625.

Hu, B. e Liu, Z. (2000): *Phase synchronization of two-dimensional lattices of coupled chaotic maps*, Physical Review E, **62**, 2, 2114.

Isola, S., Politi, A., Ruffo, S. e Torcini, A. (1990): *Lyapunov spectra of coupled map lattices*, Physics Letters A, **143**, 8, 365.

Jackson, A. E. (1990): *Perspectives of nonlinear dynamics*, **2**, Cambridge University Press, 390.

Kaneko, K. (1983): *Collapse of tori and genesis of chaos in dissipative systems*, Ph. D. Thesis, p. 222 (uma versão foi publicada pela editora World Scientific, Singapore, 1986).

Kaneko, K. (1986): *Lyapunov analysis and information flow in coupled map lattices*, Physica D, **23**, 436.

Kaneko, K. (1989) (a): *Pattern dynamics in spatiotemporal chaos*, Physica D, **34**, 1.

Kaneko, K. (1989) (b): *Chaotic but regular posi-nega switch among coded attractors by cluster-size variation*, Physical Review Letters, **63**, 3, 219.

Kaneko, K. (1990): *Clustering, coding, switching, hierarchical ordering, and control in a network of chaotic elements*, Physica D, **41**, 137.

Kaneko, K. (1991): *Globally coupled circle maps*, Physica D, **54**, 5.

Kaneko, K. (1993): *Theory and applications of coupled map lattices*, ed. K. Kaneko. Wiley, Chichester.

Keller, G. e Künzle, M. (1992), Ergodic Th. Dyn. Syst., **12**.

Kuramoto, Y. (1984): *Chemical oscillations, waves, and turbulence*, Springer-Verlag, Berlin.

Lichtenberg, A. J. e Lieberman, M. J. (1983): *Regular and stochastic motion*, Springer-Verlag, New York, 613.

- Milgram, S. (1967): *The small world problem*, Psychology Today, **2**, 60.
- Newman, M. E. (2000): *Models of the Small World*, arXiv: cond-mat/000118 v2.
- Newman, M. E. e Watts, D. J. (1999): *Scaling and percolation in the small-world network model*, Physical Review E, **60**, 6, 7332.
- Osipov, G., Pikovsky, A., Rosenblum, M. e Kurths, J. (1997): *Phase synchronization effects in a lattice of nonidentical Rossler oscillators*, Physical Review E, **55**, 3, 2353.
- Ott, E. (1993): *Chaos in dynamical systems*, Cambridge University Press.
- Parlitz, U., Junge, L., Lauterborn, W. e Kocarev, L. (1996), Physical Review E, **54**, 2115.
- Pecora, L. M. e Carroll, T. L. (1990), Physical Review Letters, **64**, 821.
- Pikovsky, A. S., Rosenblum, M. G., Osipov, G. V. e Kurths, J. (1997) (a): *Phase synchronization of chaotic oscillations in terms of periodic orbits*, Chaos, **7** (4), 680.
- Pikovsky, A. S., Rosenblum, M. G., Osipov, G. V. e Kurths, J. (1997) (b): *Phase synchronization of chaotic oscillators by external driving*, Physica D, **104**, 219.
- Pinto, S. E. de S. e Viana, R. L. (2000): *Synchronization plateaus in a lattice of coupled sine-circle maps*, Physical Review E, **61**, 5.
- Pinto, S. E. de S., Lopes, S. R. e Viana, R. L. (2001): *Synchronization in a chain of van der Pol oscillators with power-law coupling*, aceito na Physica A.
- Press, H. W., Teukolsky, S. A., Vetterling, W. T. e Flannery, B. P.(1992): *Numerical Recipes in C: The art of scientific computing*, Cambridge University Press, Programs Copyright.
- Rachavachari, S. e Glazier, J. A. (1995): *Spatially coherent states in fractally coupled map lattices*, Physical Review Letters, **74**, 16, 3297.
- Reitz, J. R., Milford, F. J. e Christy, R. W. (1982): *Fundamentos da teoria eletromagnética*, Editora Campus Ltda, 237.
- Rogers, J. L. e Wille, L. T. (1996): *Phase transitions in nonlinear oscillator chains*, Physical Review E, **54**, 3.
- Ruelle, D. (1989): *Chaotic evolution and strange attractors*, Cambridge University

Press, Cambridge.

Schuster, H. G. (1984): *Deterministic chaos*, 2nd edition, Weinheim, Physik-Verlag.

Tjaden, B. e Wasson, G. (1997), disponível: <http://www.cs.virginia.edu/oracle>.

Viana, R. L., Batista, A. M. (1998): *Synchronization of coupled kicked limit cycle systems*, *Chaos, Solitons & Fractals*, **9**, 12, 1931.

Viana, R. L. (2001): *Introdução às redes de mapas acoplados - Modelos para o estudo de caos espaço-temporal*, Departamento de Física da Universidade Federal do Paraná, Notas de Aula do Mini-Curso ministrado na Pós-Graduação do Instituto de Física de São Paulo de 21 a 25/02/2000, IFUSP Publicações 1527.

Vieira, M. S., Lichtenberg, A. J. e Lieberman, M. A. (1994): *Self-synchronization of many coupled oscillators*, *International Journal of Bifurcation and Chaos*, **4**, 6, 1563.

Wang, W., Liu, Z. e Hu, B. (2000): *Phase order in chaotic maps and in coupled map lattices*, *Physical Review Letters*, **84**, 12, 2610.

Watts, D. J. (1999): *Small Worlds*, Princeton University Press (Princeton).

Watts, D. J. e Strogatz, S. H. (1998): *Collective dynamics of small-world networks*, *Nature*, **393**, 440.

Wiesenfeld, K. e Hadley, P. (1989): *Attractor crowding in oscillator array*, *Physical Review Letters*, **62**, 1335.

Winfrey, A. T. (1968): *Biological rhythms and the behavior of populations of coupled oscillators*, *J. Theor. Biol.*, **16**, 15.